Puzzles Lógicos

João F. Ferreira*

Braga, 29 de Março de 2008

* Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Associatividade

O operador $\oplus$ é associativo:

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) .$$

Exemplos:

- $(2+3)+4 = 2+(3+4) = 2+3+4$
- $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 2 \times 3 \times 4$

Associatividade

Questão: a igualdade é associativa?

i.e.:

$$(x = y) = z \quad = \quad x = (y = z) \quad ?$$

Associatividade

Questão: a igualdade é associativa?

i.e.:

$$(x = y) = z \quad = \quad x = (y = z) \quad ?$$

A resposta depende do tipo de igualdade!

$$(2 = 3) = 4 \quad = \quad 2 = (3 = 4)$$

falso = 4 ← Não faz sentido!

Associatividade

A igualdade booleana é associativa, i.e., para x, y e z booleanos:

$$(x = y) = z \quad \Leftrightarrow \quad x = (y = z) \quad .$$

Exemplo:

- $\underbrace{(V = F)}_{F} = F \quad \Leftrightarrow \quad V = \underbrace{(F = F)}_{V} \quad .$

Igualdades Encadeadas

Como interpretar a expressão

$$2 = 3 = 4 \quad ?$$

Igualdades Encadeadas

Como interpretar a expressão

$$2 = 3 = 4 \quad ?$$

Convenção:

$$\begin{array}{ll} & 2 = 3 \quad \wedge \quad 3 = 4 \\ = & \{\text{ igualdade }\} \\ & F \quad \wedge \quad F \\ = & \{\text{ lógica }\} \\ & F \end{array}$$

(Interpretação Conjuntiva)

Conflito de interpretações

Como interpretar a expressão

$$F = V = F \quad ?$$

Conflito de interpretações

Como interpretar a expressão

$$F = V = F \qquad ?$$

Interpretação conjuntiva

$$F = V \quad \wedge \quad V = F \qquad \text{(Falso)}$$

Conflito de interpretações

Como interpretar a expressão

$$F = V = F \quad ?$$

$\equiv$

Interpretação conjuntiva

$$F = V \quad \wedge \quad V = F \qquad \text{(Falso)}$$

Interpretação associativa

$$(F = V) = F \iff F = (V = F)$$

(Verdadeiro)

Igualdades Encadeadas

Para resolver o conflito, usamos $\equiv$ para a interpretação associativa.

Exemplos:

$$\big(par(m+n) \equiv par(m)\big) \equiv par(n)$$

$$\big(y \times z > 0 \equiv y > 0\big) \equiv z > 0$$

Algumas Propriedades

- $p \equiv q \iff q \equiv p$ (Simetria)

- $p \equiv (p \equiv \text{verdadeiro})$ (Reflexividade)

Exemplo:

$$\cancel{p \equiv p} \equiv \cancel{q} \equiv \cancel{p} \equiv \cancel{q} \equiv \cancel{p} \qquad v$$

- $\neg p \equiv p \equiv \text{falso}$ (Negação)

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

Uma ilha tem dois tipos de habitantes:

- os honestos, que dizem sempre a verdade;
- os mentirosos, que mentem sempre.

Encontramos dois nativos A e B, e o nativo A diz: "Sou do mesmo tipo de B".

Qual é o tipo de A? E o de B?

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

$a \equiv$ "O nativo A é honesto"

$b \equiv$ "O nativo B é honesto"

Se A diz X, então "A é honesto" é o mesmo que "X é verdadeiro":

$$a \equiv X \quad .$$

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

Exemplo simples: A diz "Eu sou honesto".

Formalmente:

$$
\begin{aligned}
& a \equiv a \\
= \quad & \{\text{ref.}\} \\
& \text{verdadeiro.}
\end{aligned}
$$

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

Exemplo simples: A diz "Eu sou honesto".

Formalmente:

$$a \equiv a$$

Mas,

$$\begin{aligned} & a \equiv a \\ = \; & \{\text{reflexividade}\} \\ & \text{verdadeiro}. \end{aligned}$$

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

Exemplo simples: A diz "Eu sou honesto".

Formalmente:

$$a \equiv a$$

Mas,

$$\begin{aligned} & a \equiv a \\ = & \quad \{\text{reflexividade}\} \\ & \text{verdadeiro} . \end{aligned}$$

Não podemos determinar o tipo de A!

A Ilha dos Honestos e dos Mentirosos

Encontramos dois nativos A e B, e o nativo A diz: "Sou do mesmo tipo de B". Qual é o tipo de A? E o de B?

$$
\begin{aligned}
& a \equiv (a \equiv b) \\
= \quad & \{ \equiv \text{ é assoc.} \} \\
& (a \equiv a) \equiv b \\
= \quad & \{ \text{ref.} \} \\
& V \equiv b \\
= \quad & \{ \text{ref.} \} \\
& b \quad .
\end{aligned}
$$

Regra de Leibniz

A regra de Leibniz, também chamada substituição de igual por igual:

$$
\begin{aligned}
& p \equiv x \quad \wedge \quad x \equiv q \\
= \quad & \{\ \text{Leibniz}\ \} \\
& p \equiv q \quad \wedge \quad x \equiv q \quad .
\end{aligned}
$$

Caça ao Tesouro

Temos uma caixa dourada e uma caixa prateada, cada uma com uma inscrição.

Dizem-nos que uma das caixas tem um tesouro, colocado de modo a que as inscrições não se contradigam. As inscrições são:

- caixa prateada : "O tesouro não está aqui"
- caixa dourada : "Apenas uma destas inscrições é verdadeira"

Em que caixa está o tesouro?

Caça ao Tesouro

$P \equiv$ "O tesouro está na caixa prateada"
$D \equiv$ "O tesouro está na caixa dourada"
$ip \equiv$ "A inscrição na caixa prateada é verdadeira"
$id \equiv$ "A inscrição na caixa dourada é verdadeira"

O tesouro está numa das caixas: $P \equiv \neg D$
Inscrição na caixa prateada: $ip \equiv \neg P$
Inscrição na caixa dourada: $id \equiv (\neg id \equiv ip)$

Caça ao Tesouro

$$(P \equiv \neg D) \wedge (ip \equiv \neg P) \wedge (id \equiv (\neg id \equiv ip))$$

$$= \quad \{\text{associatividade}\}$$

$$(P \equiv \neg D) \wedge (ip \equiv \neg P) \wedge ((id \equiv \neg id) \equiv ip)$$

$$= \quad \{\text{negação e Leibniz}\}$$

$$(P \equiv \neg D) \wedge (falso \equiv \neg P) \wedge (falso \equiv ip)$$

$$= \quad \{\text{negação e Leibniz}\}$$

$$\neg D \wedge P \wedge \neg ip \; .$$

Caça ao Tesouro

$$(P \equiv \neg D) \wedge (ip \equiv \neg P) \wedge (id \equiv (\neg id \equiv ip))$$

$= \quad$ {associatividade}

$$(P \equiv \neg D) \wedge (ip \equiv \neg P) \wedge ((id \equiv \neg id) \equiv ip)$$

$= \quad$ {negação e Leibniz}

$$(P \equiv \neg D) \wedge (falso \equiv \neg P) \wedge (falso \equiv ip)$$

$= \quad$ {negação e Leibniz}

$$\neg D \wedge P \wedge \neg ip .$$

O tesouro está na caixa de prata!