Matemática dos Algoritmos

(Divisão Inteira)

João F. Ferreira*

Braga, 29 de Março de 2008

* Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Divisão Inteira — Definição

Já vimos anteriormente a definição:

$$\langle \forall k :: k \times Q \leq P \equiv k \leq P \div Q \rangle \quad .$$

O nosso objectivo é calcular uma solução para a equação:

$$x :: \langle \forall k :: k \times Q \leq P \equiv k \leq x \rangle$$

Divisão Inteira — Definição

$$x :: \langle \cancel{\forall k} :: \underset{x}{\cancel{k}} \times Q \le P \equiv \cancel{\underset{x}{k} \le x} \cancel{\rangle}$$

x é o maior inteiro que satisfaz

$$x \times Q \le P \quad .$$

Consequências :

(i) $\quad x \times Q \le P$

Divisão Inteira — Definição

$$x :: \langle \cancel{\forall k} :: \underset{(x+1)}{\cancel{k}} \times Q \leq P \equiv \underset{x+1}{\cancel{k \leq}}\; x \;\cancel{\rangle}$$

falso

x é o maior inteiro que satisfaz

$$x \times Q \leq P \quad .$$

Consequências:

(i) $x \times Q \leq P$

(ii) $\neg((x+1) \times Q \leq P) \rightarrow (x+1) \times Q > P$

Triplos de Hoare

Especificação de um programa: relação entre dados e resultados.

$$\{Pré\}$$
$$S$$
$$\{Pos\}$$

Programa

Especificação do Algoritmo

A conjunção das duas propriedades anteriores pode ser usada para pós-condição do algoritmo:

$$\{0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P\}$$ ← Pré-condição

$$S$$

$$\{x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg((x+1) \times Q \leq P)\}$$

Primeira Versão do Algoritmo

$\{ 0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P \}$

$x := 0 \;;$

$\{\text{Invariante:} \quad x \times Q \leq P\}$

do $(x+1)Q \leq P \longrightarrow \quad x := x + 1\,;$

od

$\{ x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg((x+1) \times Q \leq P)\}$

Calcular Atribuições

$$\{\, \underline{x \times Q \leq P} \;\wedge\; \underline{(x+1) \times Q \leq P} \,\}$$

$$x := x + A \;;$$

$$\{\, \underline{x \times Q \leq P} \,\} \longrightarrow (x+A) \times Q \leq P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

Formalmente,

$$(x+A) \times Q \leq P$$

$$\Leftarrow$$

$$x \times Q \leq P \;\wedge\; (x+1) \times Q \leq P \quad .$$

Primeira Versão do Algoritmo

$\{0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P\}$

$x := 0\,;$

$P - x$

$\{\text{Invariante: } \; x \times Q \leq P\}$

do $\quad (x+1) \times Q \leq P \longrightarrow \quad x := x + 1\,;$

od

$\{x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg\left((x+1) \times Q \leq P\right)\}$

Provar que o algoritmo termina

Função natural que decresce a cada iteração e é limitada inferiormente: $P - x$.

$$\{P - x = c\}$$
$$x := x + 1;$$
$$\{P - x < c\}$$

Decresce a cada iteração

Formalmente,

$$P - (x+1) < c \Leftarrow P - x = c .$$

Função Decrescente

$$P - (x+1) < C$$

$=$ { distributividade }

$$(P - x) - 1 < C$$

$=$ { $P - x = C$ }

$$C - 1 < C$$

$=$ { desigualdade de inteiros }

verdadeiro.

Função Limitada

$$0 \leq P - x$$

$$= \quad \{\text{cancelamento}\}$$

$$x \leq P$$

$$= \quad \{\text{Invariante } x \times Q \leq P \text{ e } 0 < Q\}$$

$$\text{verdadeiro} \; .$$

$$\begin{array}{l} x \\ \leq \quad \{0 < Q\} \\ x \times Q \end{array}$$

Podemos concluir que o programa termina.

Primeira Versão do Algoritmo

$\{ 0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P \}$

$x := 0;$

$\{$ Invariante: $\quad x \times Q \leq P$

Função Limite : $\quad P - x \qquad \}$

do $\quad (x+1) \times Q \leq P \longrightarrow \quad x := x + 1;$

od

$\{ x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg((x+1) \times Q \leq P) \}$

Simplificar o teste

$$
\begin{aligned}
& (x+1) \times Q \leq P \\
= \quad & \{ \text{ distributividade } \} \\
& x \times Q + Q \leq P \\
= \quad & \{ \text{ cancelamento } \} \\
& Q \leq \underbrace{P - x \times Q}_{y} \quad .
\end{aligned}
$$

Adicionar $y = P - x \times Q$ ao invariante

Extensão do Algoritmo Inicial

$\{ 0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P \}$

$x := 0 ; \quad y := P ;$

$\{$ Invariante: $\quad x \times Q \leq P \quad \wedge \quad y = P - x \times Q$

Função limite $: \quad P - x \quad \}$

do $\quad Q \leq y \longrightarrow \quad x := x + 1 ;$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y := y + B ;$

od

$\{ x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg((x+1) \times Q \leq P)$

$\quad \wedge \quad y = P - x \times Q \quad \}$

Calcular Atribuições

$$\{\, \underline{y = P - x \times Q} \;\wedge\; \underline{Q \leq y} \,\}$$

$$x, y := x+1 \;,\; y+B \;;$$

$$\{\, \underline{y = P - x \times Q} \,\} \longrightarrow y+B = P-(x+1)\times Q$$

Formalmente,

$$y + B = P - (x+1) \times Q$$

$$\Leftarrow$$

$$y = P - x \times Q \;\wedge\; Q \leq y \;.$$

Calcular Atribuições

$$y + B = P - (x+1) \times Q$$

$= \quad \{ \text{ distributividade } \}$

$$\cancel{y} + B = \cancel{P - x \times Q} - Q$$

$= \quad \{ \; y = P - x \times Q \quad \text{e}$

$\quad \text{cancelamento} \; \}$

$$B = -Q \quad .$$

Versão Final do Algoritmo

$$\{ 0 < Q \quad \wedge \quad 0 \leq P \}$$

$$x := 0 \; ; \qquad y := P \; ;$$

$\{$ Invariante: $\quad x \times Q \leq P \quad \wedge \quad y = P - x \times Q$

Função limite : $\quad P - x \quad \}$

do $\qquad Q \leq y \longrightarrow \qquad x := x + 1 \; ;$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y := y - Q \; ;$

od

$$\{ x \times Q \leq P \quad \wedge \quad \neg((x+1) \times Q \leq P)$$

$$\wedge \quad y = P - x \times Q \quad \}$$