



Ficha de Exercícios 3: Processos e Concorrência

Luís Soares Barbosa

Exercício I.1

Indique quais das seguintes relações em \mathbb{P} são bissimulações estritas.

$$S_1 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$S_3 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

$$S_4 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0})\}$$

$$S_5 = \{(a.\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, a.b.\mathbf{0} + b.a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, b.\mathbf{0}), (a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

Exercício I.2

Sejam $X \triangleq receive.send.X$ e $Y \triangleq send.receive.Y$. Mostre que $\{(send.X, Y), (X, receive.Y)\}$ é uma bissimulação estrita. Poderá concluir que $X \sim Y$?

Exercício I.3

Indique quais dos seguintes processos são estritamente equivalentes a $a.b.\mathbf{0}$ (realize as provas e forneça os contra-exemplos necessários para justificar as suas conclusões).

1. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0})$
2. $a.b.\mathbf{0} + a.b.\mathbf{0}$
3. $a.\tau.b.\mathbf{0}$
4. $a.b.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}$
5. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}) + a.b.\mathbf{0}$
6. $a.b.\mathbf{0} + \mathbf{0}$
7. $a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}$
8. $new \{c\} a.(b.\mathbf{0} \mid c.\mathbf{0})$
9. $new \{c, d\} a.b.(c.\mathbf{0} \mid d.\mathbf{0})$

Exercício I.4

Mostre que se S é uma bissimulação (estrita) a menos de \equiv , então $\equiv \cdot S \cdot \equiv$ constitui uma bissimulação (estrita).

Exercício I.5

Suponha que alguém adicionou à linguagem de processos \mathbb{P} dois outros operadores de composição paralela definidos pelas regras seguintes:

$$\begin{array}{c} \frac{E \xrightarrow{a} E'}{E \otimes F \xrightarrow{a} E' \otimes F} (O_1) \qquad \frac{F \xrightarrow{a} F'}{E \otimes F \xrightarrow{a} E \otimes F'} (O_2) \\ \\ \frac{E \xrightarrow{a} E' \quad \wedge \quad \bar{a} \notin \mathcal{L}(F)}{E \parallel F \xrightarrow{a} E' \parallel F} (P_1) \qquad \frac{F \xrightarrow{a} F' \quad \wedge \quad \bar{a} \notin \mathcal{L}(E)}{E \parallel F \xrightarrow{a} E \parallel F'} (P_2) \\ \\ \frac{E \xrightarrow{a} E' \quad F \xrightarrow{\bar{a}} F'}{E \parallel F \xrightarrow{\tau} E' \parallel F'} (P_3) \end{array}$$

1. Explique informalmente o propósito de \otimes e \parallel , distinguindo-os da composição paralela que estudou.
 2. A partir destas regras explique de que forma os diagramas de sincronização de $E \otimes F$ e $E \parallel F$ podem ser construídos a partir dos diagramas de E e de F . Compare esse processo com o que se passa com a construção do diagrama de sincronização de $E \mid F$.
 3. Mostre ou refute a associatividade de \parallel relativamente a \sim .
-

Exercício I.6

Determine um processo P tal que $P \mid (a.b.\mathbf{0}) \sim a.b.a.\mathbf{0} + a.a.b.\mathbf{0}$, ou mostre que um tal P não pode existir.

Exercício I.7

Considere o processo $A \triangleq a.(A \mid b.\mathbf{0})$.

1. Calcule o conjunto de derivações de A .
 2. Prove que $A \mid A \sim A$.
-

Exercício I.8

Para os seguintes pares de processos indique, justificando, os que podem ser relacionados por \approx . E por $=$?

1. $a.\tau.b.\mathbf{0}$ e $a.b.\mathbf{0}$
2. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$
3. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0}) + a.c.\mathbf{0}$
4. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
5. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}$
6. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0}))) + a.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})$
7. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.(c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.d.\mathbf{0}$

8. $\tau.(a.b.\mathbf{0} + a.c.\mathbf{0})$ e $\tau.a.b.\mathbf{0} + \tau.a.c.\mathbf{0}$
 9. $\tau.(a.\tau.b.\mathbf{0} + a.b.\tau.\mathbf{0})$ e $a.b.\mathbf{0}$
 10. $\tau.(\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0})$ e $\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
 11. $A \triangleq a.\tau.A$ e $B \triangleq a.B$
 12. $A \triangleq \tau.A + a.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0}$
 13. $A \triangleq \tau.A$ e $\mathbf{0}$
-

Exercício I.9

Suponha que os processos R e T têm, entre outras, as transições seguintes: $R \xrightarrow{\tau} T$ e $T \xrightarrow{\tau} R$. Mostre que, nessa condições, se tem $R = T$.

Exercício I.10

Considere a definição seguinte de um *ativador de n portas*:

$$AC_0 \triangleq \bar{s}.\mathbf{0}$$

$$AC_n \triangleq a.AC_{n-1}$$

1. Explique o comportamento deste processo.
 2. Defina um ativador de 4 portas usando apenas cópias do processo AC_2 e os operadores estáticos da linguagem.
 3. Poderá o processo que definiu pode ser considerado observacionalmente equivalente a AC_4 ?
-

Exercício I.11

Considere os factos seguintes acerca de uma relação binária S sobre \mathbb{P} . Para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que S constitui uma bissimulação observacional:

1. S é a relação identidade em \mathbb{P} .
 2. S é um subconjunto da relação identidade em \mathbb{P} .
 3. S é uma bissimulação estrita a menos de \equiv .
 4. S é a relação vazia.
 5. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\}$.
 6. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\} \cup \approx$.
-

Exercício I.12

Mostre que

1. $E + \tau.(E + F) = \tau.(E + F)$
2. $a.(E + \tau.\tau.E) = a.E$
3. $\tau.(G + a.(E + \tau.F)) = \tau.(G + a.(E + \tau.F)) + a.F$

Exercício I.13

Considere a equação $X = a.0 + \tau.X$. Mostre que qualquer processo da forma $\tau.(\tau.P + a.0)$ é solução da equação.

Exercício I.14

Considere a equação $X = \text{new } \{a\} (a.X \mid \bar{a}.0)$, onde a variável X ocorre guardada, mas não sequencial, no lado direito. Mostre que o processo $\tau.P$ é solução desta equação, para qualquer P desde que $a, \bar{a} \notin \text{fn}(P)$.

Exercício I.15

Para todo o processo E tal que $\text{fn}(E) = \emptyset$, prove ou refute as seguintes afirmações:

1. $E \mid Q \approx Q$.
 2. $E \mid Q = Q$.
 3. $E \mid Q = \tau.Q$.
-

Exercício I.16

Seja $E \triangleq a(x).\bar{a}(x).E$, i.e., E é um *buffer* de uma posição que utiliza a mesma porta para entrada e saída de valores. Assuma que esses valores são números inteiros.

1. Defina um processo sequencial (i.e., sem recurso à composição paralela) F tal que $F \approx E \mid E$.
 2. Prove essa equivalência construindo uma bissimulação fraca relacionando os dois processos.
 3. Será a sua proposta para F é minimal (no sentido de não conter acções não observáveis desnecessárias)?
-

Exercício I.17

Recorde as definições de equivalência entre processos que estudou.

1. A partir de definição de \approx , mostre que se o processo A for definido como $\tau.A + B$ então $A \approx B$.
 2. Dê um exemplo de processos X e Y não observacionalmente equivalentes, mas que verificam $X = \tau.X + Y$.
 3. Seja $X \triangleq x.X + y.0$ e $Y \triangleq \bar{x}.Y$. Mostre que $y.0 \approx \text{new } \{x\} (X \mid Y)$.
-

Exercício I.18

Seja P uma expressão na linguagem de processos contendo apenas uma variável livre X e considere as seguintes equações em X :

$$\begin{aligned} X &= \tau.(P + \text{new } \{a\} (a.P \mid \bar{a}.0)) \\ X &= \tau.P \end{aligned}$$

Suponha ainda que alguém formulou a seguinte conjectura sobre estas equações:

Se $a \notin \dots$, $\bar{a} \notin \dots$ e $e \dots$ ocorrer guardada e sequencial em \dots , as duas equações têm exactamente a mesma solução e esta é única (i.e., todas as possíveis soluções são observacionalmente congruentes)

1. Preencha as reticências na conjectura acima de modo a obter uma afirmação válida.
2. Prove a conjectura por raciocínio equacional.

Exercício I.19

Considere os factos seguintes e, para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que $E = F$:

1. $E \approx F$ e E é um processo estável.
2. $E \approx F$ e nem E nem F são processos estáveis.
3. Existe um G tal que $E \mid G = F \mid G$.
4. $a.E = a.F$.
5. E e F satisfazem a mesma equação $X \sim E(X)$, onde as ocorrências de X em E são todas guardadas e sequenciais.

Exercício I.20

Apesar de os sistemas concorrentes lidarem geralmente com processos perpétuos, em determinados casos é necessário considerar igualmente processos que realizam todas as suas tarefas e terminam com sucesso. Considere uma classe T de processos ditos *termináveis* que para indicar o termo da sua execução realizam uma acção observável especial \dagger , após o que evoluem necessariamente para 0 .

Na classe T é possível definir um operador de composição *sequencial*, que representamos por $P ; Q$, cujo significado intuitivo é: *após P terminar o processo composto comporta-se como Q* . Formalmente,

$$P ; Q \triangleq \text{new } (\{m/\dagger\} P \mid \overline{m} \cdot Q) m$$

sendo m um identificador de acção que não ocorre nem em P nem em Q .

1. Defina um processo $U \in T$ tal que $U ; P \approx P$. Justifique a sua definição.
2. Mostre ou refute que, para $P, Q, R \in T$, se tem

$$(P + Q) ; R \approx (P ; R) + (Q ; R)$$

3. Sendo a composição sequencial em T um caso particular da composição paralela, a lei anterior poderia parecer um caso particular da igualdade

$$(P + Q) \mid R \approx (P \mid R) + (Q \mid R)$$

No entanto esta igualdade é, em geral, falsa. Comprove esta afirmação fornecendo um contra-exemplo adequado.

Exercício I.21

Considere a seguinte especificação, na linguagem de processos que estudou, da noção de *pipe* suportada no sistema UNIX:

$$U \triangleright V \stackrel{\text{abv}}{\triangleq} \text{new } \{c\} (\{c/out\}U \mid \{c/in\}V)$$

assumindo que, em ambos os processos, as acções \overline{out} e in representam, respectivamente, as portas de saída e entrada.

1. Considere, agora, os seguintes processos, só parcialmente definidos:

$$U_1 \triangleq \overline{out}.T$$

$$V_1 \triangleq in.R$$

$$U_2 \triangleq \overline{out}.\overline{out}.\overline{out}.T$$

$$V_2 \triangleq in.in.in.R$$

Prove, indicando sempre as leis que utilizou, ou refute as seguintes proposições:

- (a) $U_1 \triangleright V_1 \sim T \triangleright R$

$$(b) U_2 \triangleright V_2 = U_1 \triangleright V_1$$

2. Mostre ou refute a associatividade do operador \triangleright relativamente à igualdade entre processos, *i.e.*, para todo o $P, T, V \in \mathbb{P}$,

$$(U \triangleright V) \triangleright T = U \triangleright (V \triangleright T)$$

3. Mostre que $\mathbf{0} \triangleright \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Exercício I.22

Seja R uma bissimulação (observacional). Diga, justificando sucintamente, quais das afirmações seguintes pode concluir desse facto:

1. Se $(E, F) \in R$ então $E \approx F$.
2. Se $E \approx F$ então $(E, F) \in R$.
3. R é uma relação transitiva.
4. A composição de R consigo própria forma uma bissimulação estrita.

Exercício I.23

Considere um operador \circ_n cuja semântica operacional é dada pela regra seguinte:

$$\frac{E \xrightarrow{a} E'}{\circ_0 E \xrightarrow{a} E'} \quad \frac{E \xrightarrow{a} E'}{\circ_n E \xrightarrow{a} \circ_{n-1} E'} \quad \text{para } n > 0$$

1. Indique sucintamente o seu propósito.
2. Discuta para que valores de m e n se poderá ter $\circ_n (\circ_m E) \sim \circ_n E$.
3. Mostre que $E \sim F$ implica $\circ_n E \sim \circ_n F$.
4. Mostre, recorrendo a um contra exemplo, que a implicação da alínea anterior deixa de verificar-se se se substituir \sim por \approx .
5. Como modificaria a semântica operacional deste novo operador para que a implicação referida se verificasse, *i.e.*, $E \approx F \Rightarrow \circ_n E \approx \circ_n F$?

Exercício I.24

Considere o operador seguinte definido operacionalmente pela regra

$$\frac{E \xrightarrow{x} E'}{E \downarrow a \xrightarrow{x} E'} \text{ se } x \neq a, x \neq \bar{a}$$

1. Indique sucinta mas claramente o seu propósito.
2. Prove, por construção de uma bissimulação, que se $P \sim Q$ então $P \downarrow a \sim Q \downarrow a$.
3. Defina dois processos E e F tais que $E \approx F$ mas $E \downarrow a \not\approx F \downarrow a$.
4. Recorrendo à definição de igualdade de processos, mostre ou refute que se $P = Q$ então $P \downarrow a = Q \downarrow a$.

Exercício 1.25

Considere um novo operador entre processos, dito *duplicador de ações*, e definido pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{E \xrightarrow{a} E'}{\circ(E) \xrightarrow{a} E}$$

Note que a derivada que surge na conclusão da regra é E e não E' . Por exemplo, $a.\mathbf{0} \xrightarrow{a} \circ(a.\mathbf{0})$. Prove ou refute que:

1. $E \sim F$ implica $\circ(E) \sim \circ(F)$.
2. $E \approx F$ implica $\circ(E) \approx \circ(F)$.
3. $\circ(E + F) \sim \circ(E) + \circ(F)$.