Ficha de Exercícios 1: Processos e Concorrência

Luís Soares Barbosa

Exercício I.1

Dados dois sistemas de transição $\langle S_1, T_1 \rangle$ e $\langle S_2, T_2 \rangle$ sobre $\mathcal{N}$, diz-se que dois estados p e q são *mutuamente similares* sse

$$p \doteqdot q \ \Leftrightarrow \ p \lesssim q \wedge q \lesssim p$$

1. Mostre que $\doteqdot$ é uma relação de equivalência.
2. Compare esta relação com a relação de bissimilaridade $\sim$ e com a noção canónica de equivalência entre autómatos.

Exercício I.2

Um simulação é trivial se é vazia ou composta apenas por pares triviais (i.e., pares de estados a partir dos quais não existem transições) ou, ainda, se contém pelo menos um par trivial que não é acessível a partir de pelo menos um par não trivial contido em S. No sistema de transição seguinte

$$\{\langle 1, z, 2\rangle, \langle 1, x, 3\rangle, \langle 4, z, 5\rangle, \langle 6, z, 7\rangle, \langle 6, x, 8\rangle, \langle 6, x, 9\rangle\}$$

indique os pares triviais e enumere todas as simulações não triviais que podem nele ser definidas.

Exercício I.3

Considere o sistema de transição caracterizado pela relação seguintes:

$$\{\langle 1, a, 2\rangle, \langle 1, a, 3\rangle, \langle 2, a, 3\rangle, \langle 2, b, 1\rangle, \langle 3, a, 3\rangle, \langle 3, b, 1\rangle, \langle 4, a, 5\rangle, \langle 5, a, 5\rangle, \langle 5, b, 6\rangle, \langle 6, a, 5\rangle, \langle 7, a, 8\rangle, \langle 8, a, 8\rangle, \langle 8, b, 7\rangle\}$$

Mostre ou refute a afirmação $1 \sim 4 \sim 6 \sim 7$.

Exercício I.4

Mostre que a bisimilaridade é uma relação de equivalência.

Exercício I.5

Mostre ou refute que

- a bisimilaridade é uma relação fechada para a reunião
- a bisimilaridade é uma relação fechada para a intersecção

Exercício I.6

Mostre que o conjunto de todas as bissimulações entre dois sistemas de transição forma um *reticulado completo*, ordenado pela inclusão, cujo topo é a relação de *bissimilaridade* $\sim$.

Exercício I.7

Um *traço* de um sistema de transição é uma sequência de nomes $s \in \mathcal{N}^*$ para os quais existe uma sequência de estados $s_0, s_1, \ldots$ tal que

$$s_0 \xrightarrow{a_0} s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{s_n} s_n$$

com $s = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.

Um traço é dito *completo* se, nas condições da definição anterior, conduzir a um estado a partir do qual não existem mais transições.

1. Mostre que dois estados bisimilares exibem os mesmo traços.
2. Será que também exibem os mesmos traços completos? Porquê?

Exercício I.8

Uma relação R entre os estados de um sistema de transição diz-se uma *bisimulação à palavra* se, sempre que $\langle p, q \rangle \in R$ e $s \in \mathcal{N}^*$, se tem

$$p \xrightarrow{s} p' \;\Rightarrow\; \langle \exists\, q' \;:\; q' \in S_2 :\; q \xrightarrow{s} q' \;\wedge\; \langle p', q' \rangle \in R \rangle$$
$$q \xrightarrow{s} q' \;\Rightarrow\; \langle \exists\, p' \;:\; p' \in S_1 :\; p \xrightarrow{s} p' \;\wedge\; \langle p', q' \rangle \in R \rangle$$

1. Defina formalmente a relação $\xrightarrow{s}$, para $s \in \mathcal{N}^*$
2. Dois estados dizem-me *bisimilares à palavra* sse existir uma bisimulação à palavra que os contenha. Mostre que dois estados p e q são *bisimilares à palavra* sse $p \sim q$.

Exercício I.9

Como estudou, as definições de *morfismo* entre sistemas de transição são distintas conforme se adopta a caracterização relacional clássica ou a coalgébrica. Recordando essas definições, mostre que

1. O grafo de um morfismo entre sistemas de transição na caracterização relacional é uma simulação
2. O grafo de um morfismo entre sistemas de transição na caracterização coalgébrica é uma bissimulação