Ficha de Exercícios 3: Processos e Concorrência

Luís Soares Barbosa

Exercício I.1

Indique quais das seguintes relações em $\mathbb{P}$ são bissimulações estritas.

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\} \\
&S_2 = \emptyset \\
&S_3 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0})\} \\
&S_4 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0})\} \\
&S_5 = \{(a.\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, a.b.\mathbf{0} + b.a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, b.\mathbf{0}), (a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, \mathbf{0})\}
\end{aligned}
$$

Exercício I.2

Sejam $X \triangleq receive.send.X$ e $Y \triangleq send.receive.Y$. Mostre que $\{(send.X, Y), (X, receive.Y)\}$ é uma bissimulação estrita. Poderá concluir que $X \sim Y$?

Exercício I.3

Indique quais dos seguintes processos são estritamente equivalentes a $a.b.\mathbf{0}$ (realize as provas e forneça os contra-exemplos necessários para justificar as suas conclusões.

1. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0})$
2. $a.b.\mathbf{0} + a.b.\mathbf{0}$
3. $a.\tau.b.\mathbf{0}$
4. $a.b.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}$
5. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}) + a.b.\mathbf{0}$
6. $a.b.\mathbf{0} + \mathbf{0}$
7. $a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}$
8. new $\{c\}$ $a.(b.\mathbf{0} \mid c.\mathbf{0})$
9. new $\{c, d\}$ $a.b.(c.\mathbf{0} \mid d.\mathbf{0})$

Exercício I.4

Mostre que se S é uma bissimulação (estrita) a menos de $\equiv$, então $\equiv \cdot S \cdot \equiv$ constitui uma bissimulação (estrita).

Exercício I.5

Suponha que alguém adicionou à linguagem de processos $\mathbb{P}$ dois outros operadores de composição paralela definidos pelas regras seguintes:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E' \otimes F \xleftarrow{a} E \otimes F}\,(O_1) \qquad \frac{F' \xleftarrow{a} F}{E \otimes F' \xleftarrow{a} E \otimes F}\,(O_2)$$

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E \quad \wedge \quad \overline{a} \notin \mathsf{fn}(F)}{E' \parallel F \xleftarrow{a} E \parallel F}\,(P_1) \qquad \frac{F' \xleftarrow{a} F \quad \wedge \quad \overline{a} \notin \mathsf{fn}(E)}{E \parallel F' \xleftarrow{a} E \parallel F}\,(P_2)$$

$$\frac{E \xleftarrow{a} E' \quad F \xleftarrow{\overline{a}} F'}{E' \parallel F' \xleftarrow{\tau} E \parallel F}\,(P_3)$$

1. Explique informalmente o propósito de $\otimes$ e $\parallel$, distinguindo-os da composição paralela que estudou.
2. A partir destas regras explique de que forma os diagramas de sincronização de $E \otimes F$ e $E \parallel F$ podem ser construidos a partir dos diagramas de E e de F. Compare esse processo com o que se passa com a construção do diagrama de sincronização de $E \mid F$.
3. Mostre ou refute a associatividade de $\parallel$ relativamente a $\sim$.

Exercício I.6

Determine um processo P tal que $P \mid (a.b.\mathbf{0}) \sim a.b.a.\mathbf{0} + a.a.b.\mathbf{0}$, ou mostre que um tal P não pode existir.

Exercício I.7

Considere o processo $A \triangleq a.(A \mid b.\mathbf{0})$.

1. Calcule o conjunto de derivações de A.
2. Prove que $A \mid A \sim A$.

Exercício I.8

Para os seguintes pares de processos indique, justificando, os que podem ser relacionados por $\approx$. E por $=$?

1. $a.\tau.b.\mathbf{0}$ e $a.b.\mathbf{0}$
2. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$
3. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0}) + a.c.\mathbf{0}$
4. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
5. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}$
6. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0}))) + a.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})$
7. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.(c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.d.\mathbf{0}$

8. $\tau.(a.b.\mathbf{0} + a.c.\mathbf{0})$ e $\tau.a.b.\mathbf{0} + \tau.a.c.\mathbf{0}$
9. $\tau.(a.\tau.b.\mathbf{0} + a.b.\tau.\mathbf{0})$ e $a.b.\mathbf{0}$
10. $\tau.(\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0})$ e $\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
11. $A \triangleq a.\tau.A$ e $B \triangleq a.B$
12. $A \triangleq \tau.A + a.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0}$
13. $A \triangleq \tau.A$ e $\mathbf{0}$

Exercício I.9

Suponha que os processos R e T têm, entre outras, as transições seguintes: $R \xleftarrow{\tau} T$ e $T \xleftarrow{\tau} R$. Mostre que, nessa condições, se tem $R = T$.

Exercício I.10

Considere a definição seguinte de um *activador de n portas*:

$$\begin{aligned} AC_0 &\triangleq \overline{s}.\mathbf{0} \\ AC_n &\triangleq a.AC_{n-1} \end{aligned}$$

1. Explique o comportamento deste processo.
2. Defina um activador de 4 portas usando apenas cópias do processo AC_2 e os operadores estáticos da linguagem.
3. Poderá o processo que definiu pode ser considerado observacionalmente equivalente a AC_4?

Exercício I.11

Considere os factos seguintes acerca de uma relação binária S sobre $\mathbb{P}$. Para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que S constitui uma bissimulação observacional:

1. S é a relação identidade em $\mathbb{P}$.
2. S é um subconjunto da relação identidade em $\mathbb{P}$.
3. S é uma bissimulação estrita a menos de $\equiv$.
4. S é a relação vazia.
5. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\}$.
6. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\} \cup \approx$.

Exercício I.12

Mostre que

1. $E + \tau.(E + F) \ = \ \tau.(E + F)$
2. $a.(E + \tau.\tau.E) \ = \ a.E$
3. $\tau.(G + a.(E + \tau.F)) \ = \ \tau.(G + a.(E + \tau.F)) + a.F$

Exercício I.13

Considere a equação $X = a.\mathbf{0} + \tau.X$. Mostre que qualquer processo da forma $\tau.(\tau.P + a.\mathbf{0})$ é solução da equação.

Exercício I.14

Considere a equação $X = \mathsf{new}\,\{a\}\ (a.X \mid \overline{a}.\mathbf{0})$, onde a variável X ocorre guardada, mas não sequencial, no lado direito. Mostre que o processo $\tau.P$ é solução desta equação, para qualquer P desde que $a, \overline{a} \notin \mathsf{fn}(P)$.

Exercício I.15

Para todo o processo E tal que $\mathsf{fn}(E) = \emptyset$, prove ou refute as seguintes afirmações:

1. $E \mid Q \approx Q$.
2. $E \mid Q = Q$.
3. $E \mid Q = \tau.Q$.

Exercício I.16

Seja $E \triangleq a(x).\overline{a}\langle x\rangle.E$, *i.e.*, E é um *buffer* de uma posição que utiliza a mesma porta para entrada e saída de valores. Assuma que esses valores são números inteiros.

1. Defina um processo sequencial (*i.e.*, sem recurso à composição paralela) F tal que $F \approx E \mid E$.
2. Prove essa equivalência construindo uma bissimulação fraca relacionando os dois processos.
3. Será a sua proposta para F é minimal (no sentido de não conter acções não observáveis desnecessárias)?

Exercício I.17

Recorde as definições de equivalência entre processos que estudou.

1. A partir de definição de $\approx$, mostre que se o processo A fôr definido como $\tau.A + B$ então $A \approx B$.
2. Dê um exemplo de processos X e Y não observacionalmente equivalentes, mas que verificam $X = \tau.X + Y$.
3. Seja $X \triangleq x.X + y.\mathbf{0}$ e $Y \triangleq \overline{x}.Y$. Mostre que $y.\mathbf{0} \approx \mathsf{new}\,\{x\}\ (X \mid Y)$.

Exercício I.18

Seja P uma expressão na linguagem de processos contendo apenas uma variável livre X e considere as seguintes equações em X:

$$X = \tau.(P + \mathsf{new}\,\{a\}\ (a.P \mid \overline{a}.\mathbf{0}))$$
$$X = \tau.P$$

Suponha ainda que alguém formulou a seguinte conjectura sobre estas equações:

Se $a \notin \cdots$, $\overline{a} \notin \cdots$ e $\cdots$ ocorrer guardada e sequencial em $\cdots$, as duas equações têm exactamente a mesma solução e esta é única (i.e., *todas as possiveis soluções são observacionalmente congruentes)*

1. Preencha as reticências na conjectura acima de modo a obter uma afirmação válida.
2. Prove a conjectura por raciocínio equacional.

Exercício I.19

Considere os factos seguintes e, para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que $E = F$:

1. $E \approx F$ e E é um processo estável.
2. $E \approx F$ e nem E nem F são processos estáveis.
3. Existe um G tal que $E \mid G = F \mid G$.
4. $a.E = a.F$.
5. E e F satisfazem a mesma equação $X \sim E(X)$, onde as ocorrências de X em E são todas guardadas e sequenciais.

Exercício I.20

Apesar de os sistemas concorrentes lidarem geralmente com processos perpétuos, em determinados casos é necessário considerar igualmente processos que realizam todas as suas tarefas e terminam com sucesso. Considere uma classe T de processos ditos *termináveis* que para indicar o termo da sua execução realizam uma acção observável especial †, após o que evoluem necessariamente para **0**.

Na classe T é possível definir um operador de composição *sequencial*, que representamos por $P \,;\, Q$, cujo significado intuitivo é: *após P terminar o processo composto comporta-se como Q*. Formalmente,

$$P \,;\, Q \quad \triangleq \quad \mathsf{new}\,(\{m/\dagger\}\, P \mid \overline{m} \cdot Q)\; m$$

sendo m um identificador de acção que não ocorre nem em P nem em Q.

1. Defina um processo $U \in T$ tal que $U \,;\, P \approx P$. Justifique a sua definição.
2. Mostre ou refute que, para $P, Q, R \in T$, se tem
$$(P + Q) \,;\, R \;\;\approx\;\; (P \,;\, R) \,+\, (Q \,;\, R)$$
3. Sendo a composição sequencial em T um caso particular da composição paralela, a lei anterior poderia parecer um caso particular da igualdade
$$(P + Q) \mid R \;\;\approx\;\; (P \mid R) \,+\, (Q \mid R)$$
No entanto esta igualdade é, em geral, falsa. Comprove esta afirmação fornecendo um contra-exemplo adequado.

Exercício I.21

Considere a seguinte especificação, na linguagem de processos que estudou, da noção de *pipe* suportada no sistema UNIX:

$$U \rhd V \;\; \stackrel{\text{abv}}{=} \;\; \mathsf{new}\,\{c\}\;(\{c/out\}U \mid \{c/in\}V)$$

assumindo que, em ambos os processos, as acções $\overline{out}$ e in representam, respectivamente, as portas de saída e entrada.

1. Considere, agora, os seguintes processos, só parcialmente definidos:
$$U_1 \triangleq \overline{out}.T$$
$$V_1 \triangleq in.R$$
$$U_2 \triangleq \overline{out}.\overline{out}.\overline{out}.T$$
$$V_2 \triangleq in.in.in.R$$
Prove, indicando sempre as leis que utilizou, ou refute as seguintes proposições:
   (a) $U_1 \rhd V_1 \;\;\sim\;\; T \rhd R$

(b) $U_2 \rhd V_2 \;=\; U_1 \rhd V_1$

2. Mostre ou refute a associatividade do operador $\rhd$ relativamente à igualdade entre processos, *i.e.*, para todo o $P, T, V \in \mathbb{P}$,
$$(U \rhd V) \rhd T \;=\; U \rhd (V \rhd T)$$
3. Mostre que $\mathbf{0} \rhd \mathbf{0} \;=\; \mathbf{0}$.

Exercício I.22

Seja R uma bissimulação (observacional). Diga, justificando sucintamente, quais das afirmações seguintes pode concluir desse facto:

1. Se $(E, F) \in R$ então $E \approx F$.
2. Se $E \approx F$ então $(E, F) \in R$.
3. R é uma relação transitiva.
4. A composição de R consigo própria forma uma bissimulação estrita.

Exercício I.23

Considere um operador $\circlearrowleft_n$ cuja semântica operacional é dada pela regra seguinte:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E' \xleftarrow{a} \circlearrowleft_0 E} \qquad \frac{E' \xleftarrow{a} E}{\circlearrowleft_{n-1} E' \xleftarrow{a} \circlearrowleft_n E} \quad \text{para } n > 0$$

1. Indique sucintamente o seu propósito.
2. Discuta para que valores de m e n se poderá ter $\circlearrowleft_n (\circlearrowleft_m E) \sim \circlearrowleft_n E$.
3. Mostre que $E \sim F$ implica $\circlearrowleft_n E \sim \circlearrowleft_n F$.
4. Mostre, recorrendo a um contra exemplo, que a implicação da alínea anterior deixa de verificar-se se se substituir $\sim$ por $\approx$.
5. Como modificaria a semântica operacional deste novo operador para que a implicação referida se verificasse, *i.e.*, $E \approx F \;\Rightarrow\; \circlearrowleft_n E \approx \circlearrowleft_n F$?

Exercício I.24

Considere o operador seguinte definido operacionalmente pela regra

$$\frac{E' \xleftarrow{x} E}{E' \xleftarrow{x} E \setminus\setminus_a} \text{ se } \quad x \neq a, x \neq \overline{a}$$

1. Indique sucinta mas claramente o seu propósito.
2. Prove, por construção de uma bissimulação, que se $P \sim Q$ então $P \setminus\setminus_a \sim Q \setminus\setminus_a$.
3. Defina dois processos E e F tais que $E \approx F$ mas $E \setminus\setminus_a \not\approx F \setminus\setminus_a$.
4. Recorrendo à definição de igualdade de processos, mostre ou refute que se $P = Q$ então $P \setminus\setminus_a = Q \setminus\setminus_a$.

Exercício I.25

Considere um novo operador entre processos, dito *duplicador de acções*, e definido pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E \xleftarrow{a} \circlearrowleft(E)}$$

Note que a derivada que surge na conclusão da regra é E e não E'. Por exemplo, $a.\mathbf{0} \xleftarrow{a} \circlearrowleft(a.\mathbf{0})$. Prove ou refute que:

1. $E \sim F$ implica $\circlearrowleft(E) \sim \circlearrowleft(F)$.
2. $E \approx F$ implica $\circlearrowleft(E) \approx \circlearrowleft(F)$.
3. $\circlearrowleft(E + F) \sim \circlearrowleft(E) + \circlearrowleft(F)$.