

Verificação Formal (2018/19)

Problema para implementar em Coq / Why3

Certas linguagens de programação e máquinas abstractas avaliam expressões aritméticas usando uma *stack*.

Por exemplo, a expressão $(2*3)+(3*(4-2))$ seria escrita `2 3 * 3 4 2 - * +` (formato *post-order*) e avaliada, com o auxílio de uma *stack*, assim:

STACK		Expressão
[]		2 3 * 3 4 2 - * +
[2]		3 * 3 4 2 - * +
[3, 2]		* 3 4 2 - * +
[6]		3 4 2 - * +
[3, 6]		4 2 - * +
[4, 3, 6]		2 - * +
[2, 4, 3, 6]		- * +
[2, 3, 6]		* +
[6, 6]		+
[12]		

O objectivo deste exercício é escrever um pequeno compilador que traduza expressões aritméticas em instruções de uma máquina de *stack*.

Apresentamos duas versões do problema:

1. Uma versão, mais simples, que lida só com expressões sem variáveis. Uma expressão poderá ter apenas números e as operações binárias: adição, subtração e multiplicação.
2. Uma versão, mais desafiadora, que aceita expressões com variáveis. Neste caso, uma expressão poderá ser: um número, uma variável ou uma adição, subtração ou multiplicação de expressões. Neste caso é preciso lidar com a noção de estado (ou valoração), que indica o valor associado a cada variável.

Expressões sem variáveis

1. Comece por definir um tipo indutivo, `aexp`, para representar a sintaxe abstracta das expressões.
2. Defina uma função de avaliação das expressões, `aeval`, que recebe uma expressão e produz um número.
3. Faça alguns exemplos de avaliação de expressões concretas.
4. Defina agora a avaliação de uma expressão como uma relação, `aevalR`, entre expressões aritméticas e números.
5. Prove agora que a definição relacional e funcional de avaliação concordam, isto é,

$$\forall a n, (\text{aevalR } a n) \Leftrightarrow (\text{aeval } a) = n$$

Expressões com variáveis

Nesta versão vamos enriquecer as expressões aritméticas com variáveis. Para avaliar estas expressões precisamos de lidar com a noção de *estado* (ou *valoração*) que representa os valores actuais das variáveis.

Para simplificar, assumimos que o estado é definido para todas as variáveis, mesmo que a expressão apenas mencione algumas. Dado que cada variável vai ter associado um número, podemos representar o estado como um mapeamento de `string` para `nat` (ou para `int`, se preferirem) e usar 0 como valor por omissão.

Será também útil ter uma representação do estado inicial *init* (onde todas as variáveis mapeiam em 0) e uma função de *update* do estado que dado um estado *s*, uma variável *y* e um número *n*, devolve o estado $s[y \mapsto n]$ onde *y* está associado a *n* e as restantes variáveis ao valor que já tinham em *s*. Isto é,

$$(s[y \mapsto n])x = \begin{cases} n & \text{se } x = y \\ s\ x & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

1. Comece por adicionar variáveis às expressões aritméticas que tínhamos antes, adicionando ao tipo indutivo `aexp` mais um construtor (para o caso da expressão ser uma variável).
2. A função de avaliação das expressões, `aeval`, é agora estendida para manipular variáveis (da maneira óbvia), considerando o estado como um argumento extra.
3. Faça alguns exemplos de avaliação de expressões em estados concretos.
4. A definição da avaliação de uma expressão como uma relação, `aevalR`, é agora estendida para manipular variáveis (da maneira óbvia), e passa a relacionar expressões aritméticas, estados e números.
5. Prove agora que a definição relacional e funcional de avaliação concordam, isto é,

$$\forall a\ s\ n, (\text{aevalR}\ a\ s\ n) \Leftrightarrow (\text{aeval}\ a\ s) = n$$

A máquina de stack

A máquina de stack terá o seguinte conjunto de instruções:

SPush *n*: coloca *n* no topo da stack.

SLoad *x*: carrega o valor associado no estado à variável *x* para o topo da stack. (Caso não lide com variáveis, pode ignorar esta instrução.)

SPlus: retira os dois números que estão no topo da stack, adiciona-os e coloca o resultado no topo da stack.

SMinus: similar (mas subtrai).

SMult: similar (mas multiplica).

1. Escreva uma função, `execute`, para avaliar programas na linguagem da máquina de stack. A função deve ter como entrada um estado, uma stack representada como uma lista de números (o topo da stack é a cabeça da lista) e um programa representado como uma lista de instruções, e deve retornar a stack após a execução do programa.

2. Teste sua função com alguns programas concretos.
3. Observe que a especificação não indica o que fazer ao encontrar uma instrução `SPlus`, `SMinus` ou `SMult` se a pilha contiver menos de dois elementos. Em certo sentido, é irrelevante o que fazemos, já que nosso compilador nunca produzirá um programa tão malformado.

O compilador

Vamos agora escrever o compilador e provar a sua correcção face à semântica de avaliação.

1. Escreva uma função, `compile`, que faz a compilação de uma expressão aritmética num programa da máquina de stack. O efeito de executar o programa deve ser o mesmo que colocar o valor da expressão no topo da stack.
2. Teste sua função com um exemplo concreto.
3. Finalmente, tente demonstrar a correcção do compilador que implementou. Isto é, prove o seguinte teorema¹

$$\forall s a, \text{execute } s [] (\text{compile } a) = [(\text{aeval } s a)]$$

É natural que precise de declarar um lema mais geral para obter uma hipótese de indução utilizável. O teorema virá depois como um simples corolário desse lemma.

¹Caso não lide com variáveis, o teorema de correcção a provar será simplesmente

$$\forall a, \text{execute } [] (\text{compile } a) = [(\text{aeval } a)]$$