Formulário de MFES-CSI
Victor Miraldo fecit in MMXII/XIII
Numeração adaptada à edição de 2013/14 por Yoan Ribeiro

**Eindhoven-Calculus**

---

## Semântica

$$\langle \forall x \ : \ R \ : \ S \rangle \equiv \forall x \ R \Rightarrow S$$
$$\langle \exists x \ : \ R \ : \ S \rangle \equiv \exists x \ R \wedge S$$

## Regras

$$\langle \forall x \ : \ R \ : \ \langle \forall y \ : \ S \ : \ T \rangle \rangle \equiv \langle \forall y \ : \ \langle \exists x \ : \ R \ : \ S \rangle \ : \ T \rangle \tag{10}$$
$$\langle \exists x \ : \ R \ : \ \langle \exists y \ : \ S \ : \ T \rangle \rangle \equiv \langle \exists y \ : \ \langle \exists x \ : \ R \ : \ S \rangle \ : \ T \rangle \tag{11}$$

$$\langle \forall x \ : \ x = c \ : \ T \rangle \equiv [x/c]T \tag{12}$$
$$\langle \exists x \ : \ x = c \ : \ T \rangle \equiv [x/c]T \tag{13}$$

$$\langle \forall x, y \ : \ R \wedge S \ : \ T \rangle \equiv \langle \forall x \ : \ R \ : \ \langle \forall y \ : \ S \ : \ T \rangle \rangle \tag{14}$$
$$\langle \exists x, y \ : \ R \wedge S \ : \ T \rangle \equiv \langle \exists x \ : \ R \ : \ \langle \exists y \ : \ S \ : \ T \rangle \rangle \tag{15}$$

$$\langle \forall x \ : \ R \vee S \ : \ T \rangle \equiv \langle \forall x \ : \ R \ : \ T \rangle \wedge \langle \forall x \ : \ S \ : \ T \rangle \tag{30}$$
$$\langle \exists x \ : \ R \vee S \ : \ T \rangle \equiv \langle \exists x \ : \ R \ : \ T \rangle \vee \langle \exists x \ : \ S \ : \ T \rangle \tag{31}$$

$$\langle \forall x \ : \ R \ : \ T \wedge T' \rangle \equiv \langle \forall x \ : \ R \ : \ T \rangle \wedge \langle \forall x \ : \ R \ : \ T' \rangle \tag{32}$$
$$\langle \exists x \ : \ R \ : \ T \vee T' \rangle \equiv \langle \exists x \ : \ R \ : \ T \rangle \vee \langle \exists x \ : \ R \ : \ T' \rangle \tag{33}$$

$$\langle \forall x \ : \ R \ : \ \neg T \rangle \equiv \neg \langle \exists x \ : \ R \ : \ T \rangle \tag{34}$$
$$\langle \exists x \ : \ R \ : \ \neg T \rangle \equiv \neg \langle \forall x \ : \ R \ : \ T \rangle \tag{35}$$

**Relações: propriedades e classificações**

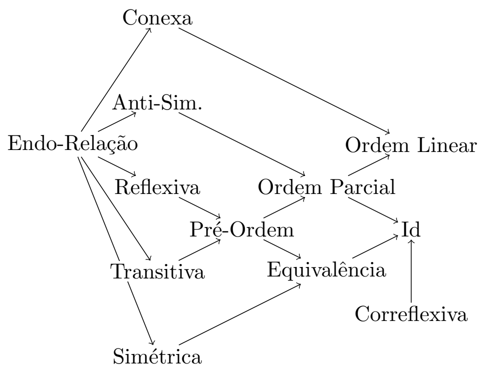
---

$$ker R = R^\circ . R \qquad img R = R . R^\circ$$

$$R \text{ Reflexiva} \equiv id \subseteq R \qquad R \text{ Correflexiva} \equiv R \subseteq id$$

$$R \text{ Inteira} \equiv id \subseteq ker R \qquad R \text{ Injetiva} \equiv ker R \subseteq id$$
$$R \text{ Sobrejetiva} \equiv id \subseteq img R \qquad R \text{ Simples} \equiv img R \subseteq id$$

$$R \text{ Transitiva} \equiv R . R \subseteq R \qquad R \text{ Anti-Sim.} \equiv R \cap R^\circ \subseteq id$$
$$R \text{ Simétrica} \equiv R = R^\circ \qquad R \text{ Conexa} \equiv R \cup R^\circ = \top$$


## Split e Join

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & C \arrow[ul, "R"] \arrow[u, "\langle R, S \rangle"'] \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "R"'] & A + B \arrow[d, "{[R, S]}"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "S"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$R \times S = \langle R.\pi_1, S.\pi_2 \rangle$$

$$\langle R, S \rangle \equiv \pi_1^\circ.R \cap \pi_2^\circ.S \tag{83}$$

$$X \subseteq \langle R, S \rangle \equiv \pi_1.X \subseteq R \wedge \pi_2.X \subseteq S \tag{84}$$

$$R + S = [i_1.R, i_2.S]$$

$$[R, S] \equiv R.i_1^\circ \cup S.i_2^\circ$$

$$X = [R, S] \equiv R = X.i_1 \wedge S = X.i_2 \tag{88}$$

Distributividades:

$$\langle R, S \rangle.f = \langle R.f, S.f \rangle \tag{92}$$

$$[\langle R, S \rangle, \langle T, V \rangle] = \langle [R, T], [S, V] \rangle \tag{93}$$

## Álgebra Relacional

Igualdade:

$$R = S \equiv R \subseteq S \wedge S \subseteq R \tag{77}$$

$$\equiv X \subseteq R \equiv X \subseteq S, \forall X \tag{78}$$

$$\equiv R \subseteq X \equiv S \subseteq X, \forall X \tag{79}$$

$$f = g \equiv f \subseteq g \equiv g \subseteq f \tag{61}$$

Universais $\cup$ e $\cap$:

$$X \subseteq R \cap S \equiv X \subseteq R \wedge X \subseteq S \tag{69}$$

$$R \cup S \subseteq X \equiv R \subseteq X \wedge S \subseteq X \tag{70}$$

Guardanapo:

$$(f\ b)R(g\ a) \equiv b(f^\circ.R.g)a \tag{51}$$

Shunting:

$$f.R \subseteq S \equiv R \subseteq f^\circ.S \tag{59}$$

$$R.f^\circ \subseteq S \equiv R \subseteq S.f \tag{60}$$

Monotonia:

Os operadores $.$ , $(\cdot)^\circ$, $\cap$ e $\cup$ são monótonos sobre $\subseteq$.

Seta de Reynolds:

$$f(R \leftarrow S)g \equiv f.S \subseteq R.g \quad (191)$$
$$\equiv S \subseteq f^\circ.R.g$$
$$\equiv \langle \forall b, a \ : \ b \ S \ s \ : \ (f \ b)R(g \ a) \rangle$$

Correflexivas:

Um predicado unário $p$ é codificado por uma relação correflexiva:

$$z \ \Phi_p \ x \equiv z = x \ \wedge \ (p \ z) \quad (109)$$

*Relator*:

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \dashrightarrow & \text{G A} \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G\ R} \\ \text{B} & \dashrightarrow & \text{G B} \end{array}$$

Diz-se que $G$ é um *relator* se satisfaz:

$$G \ id_A = id_{G \ A} \qquad G \ (R.S) = (G \ R).(G \ S)$$
$$G \ R^\circ = (G \ R)^\circ \qquad R \subseteq S \Rightarrow G \ R \subseteq G \ S$$

Correflexivas como condições laterais:

$$z \ (\Phi_p.\top) \ x \equiv (p \ z)$$
$$z \ (\top.\Phi_q) \ x \equiv (q \ x)$$

## Cálculo de Correflexivas

Sejam $\Phi$ e $\Psi$ relações correflexivas, então:

Simetria e Transitividade:

$$\Phi \equiv \Phi^\circ \equiv \Phi.\Phi \quad (116)$$

Pré e Pós-Condição:

$$R.\Phi \equiv R \cap \top.\Phi \quad (122)$$
$$\Psi.R \equiv R \cap \Psi.\top \quad (123)$$

*Select, Project*:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ A & \xrightarrow[\sigma_{\Psi,\Phi}R]{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D & \xrightarrow[\pi_{g,f}R]{} & C \end{array}$$

$$\sigma_{\Psi,\Phi}R \equiv \Psi.R.\Phi \quad (124)$$
$$\equiv \{(b, a) : b \ R \ a \ \wedge \ (\psi \ b) \ \wedge \ (\phi \ a)\}$$

$$\pi_{g,f}R \equiv g.R.f^\circ \quad (127)$$
$$\equiv \{(g \ b, f \ a) : b \ R \ a\}$$

Fechos:

$$R.\Phi \subseteq S \equiv R.\Phi \subseteq S.\Phi \quad (118)$$
$$\Phi.R \subseteq S \equiv \Phi.R \subseteq \Phi.S \quad (119)$$

Conjunção:

$$\Phi \cap \Psi \equiv \Phi.\Psi \quad (117)$$

Condições laterais:

$$\Phi \subseteq \top.\Psi \overset{(115)}{\equiv} \Phi \subseteq \Psi \overset{(116)}{\equiv} \Phi \subseteq \Psi.\top$$

Propriedades Calculacionais:

$$\Phi_{p \wedge q} \equiv \Phi_p.\Phi_q \quad (111)$$
$$\Phi_{p \vee q} \equiv \Phi_p \cup \Phi_q \quad (112)$$
$$\Phi_{\neg p} \equiv id - \Phi_p \quad (113)$$
$$\Phi_{True} \equiv id \quad (115)$$
$$\Phi_{False} \equiv \bot \quad (114)$$

## Domínio e Contradomínio

Definições:

$$\delta R \equiv (ker \ R) \cap id \qquad \rho R \equiv (img \ R) \cap id \quad (131)$$

Universais e Eliminação:

$$\delta R \subseteq \Phi \equiv R \subseteq \top.\Phi \qquad \top.\delta R \equiv \top.R \quad (133,135)$$
$$\rho R \subseteq \Phi \equiv R \subseteq \Phi.\top \qquad \rho R.\top \equiv R.\top \quad (134,136)$$

Cálculo:

$$\delta R = \rho(R^\circ) \tag{138}$$
$$\delta(R.S) = \delta(\delta R.S) \tag{139}$$
$$\rho(R.S) = \rho(R.\rho S) \tag{140}$$
$$R = R.\delta R = \rho R.R \tag*{(141,142)}$$

**Contratos, Dep. Funcionais e Invariantes**

---

Definições:

Uma relação $R$ satisfaz uma dependência funcional (FD) $g \to f$, notada por $g \xrightarrow{R} f$ se $\pi_{f,g}R$ é simples.

Propriedades:

$$g \xrightarrow{R} f \equiv \ker(g.R^\circ) \subseteq \ker f \tag{129}$$
$$h \xrightarrow{S.R} g \Leftarrow h \xrightarrow{S} f \,\wedge\, f \xrightarrow{R} g \tag{130}$$

Vamos então extender a noção de declaração de tipos para predicados, escrevendo: $\phi_B \xleftarrow{f} \phi_A$ para representar:

$$f.\phi_A \subseteq \phi_B.f \tag{148}$$
$$\equiv f.\phi_A \subseteq \phi_B.\top \tag{149}$$
$$\equiv \rho(f.\phi_A) \subseteq \phi_B \tag{150}$$

**Extended Type Checking**

---

Definições:

$$p \to f, g \equiv f.\phi_p \cup g.\phi_{\neg p} \tag{157}$$

$$\phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_1} \cup \phi_{A_2} \equiv \phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_1} \,\wedge\, \phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_2} \tag{154}$$

$$\phi_{B_1}.\phi_{B_2} \xleftarrow{f} \phi_A \equiv \phi_{B_1} \xleftarrow{f} \phi_A \,\wedge\, \phi_{B_2} \xleftarrow{f} \phi_A \tag{155}$$

$$\phi_B \xleftarrow{p \to f,g} \phi_A \equiv \phi_B \xleftarrow{f} \phi_A.\phi_p \,\wedge\, \phi_B \xleftarrow{g} \phi_A.\phi_{\neg p} \tag{158}$$

$$\phi_B \xleftarrow{g.h} \phi_A \Leftarrow \phi_B \xleftarrow{g} \psi \,\wedge\, \psi \xleftarrow{h} \phi_A \tag{151}$$

$$\psi_1 \times \psi_2 \xleftarrow{\langle f,g \rangle} \phi \equiv \psi_1 \xleftarrow{f} \phi \,\wedge\, \psi_2 \xleftarrow{g} \phi \tag{153}$$

**Propriedades Extra**

---

$$!.f \equiv ! \qquad\qquad \top \equiv !^\circ.!$$

Seja $\phi : t$ uma função de tipo $t$, $V$ o conjunto da variáveis de tipos de $t$, $\{R_v\}_{v \in V}$ uma família de relações e $\mathcal{R}_t$ definida indutivamente por:

$$\mathcal{R}_v = R_v \tag{182}$$
$$\mathcal{R}_{F(t_1,\cdots,t_n)} = F(\mathcal{R}_{t_1}, \cdots, \mathcal{R}_{t_n}) \tag{183}$$
$$\mathcal{R}_{t_2 \leftarrow t_1} = \mathcal{R}_{t_2} \leftarrow \mathcal{R}_{t_1} \tag{184}$$

Então $\phi \; \mathcal{R}_t \; \phi$.
Alguns casos de interesse seguem. Note que as relações $R_x$, para qualquer $x$, estão universsalmente quantificadas.

$$
\begin{array}{rcl}
map :: (B^* \leftarrow A^*) \leftarrow (B \leftarrow A) & \cdot & \forall f, g : f.R_a \subseteq R_b.g \Rightarrow (map\ f).R_a^* \subseteq R_b^*.(map\ g) \\
filter :: (A^* \leftarrow A^*) \leftarrow (Bool \leftarrow A) & \cdot & \forall f, g : f.R_a \subseteq g \Rightarrow (filter\ f).R_a^* \subseteq R_a^*.(filter\ g) \\
(\!| \cdot |\!) :: (B \leftarrow F\ A) \leftarrow (B \leftarrow G\ (A, B)) & \cdot & \forall f, g : f.(G\ R_a \times R_b) \subseteq R_b.g \Rightarrow (\!| f |\!).(F\ R_a) \subseteq R_b.(\!| g |\!) \\
! :: 1 \leftarrow A & \cdot & !.R_a \subseteq\ !
\end{array}
$$

## Conexões de Galois

Dizemos que duas funções (relações) $f$ e $g$ são adjuntas, e notamos por $f \vdash g$, quando:

$$f\ b \leq a \equiv b \sqsubseteq g\ a \tag{209}$$

ou, em *pointfree*:

$$f^\circ . \leq\ =\ \sqsubseteq .g \tag{210}$$

Seguem algumas leis úteis (onde $\sqcap, \sqcup, \vee, \wedge$ denotam supremos e ínfimos):

| | | |
|---|---|---|
| Definição | $f\ b = \wedge\{a : b \sqsubseteq g\ a\}$ | $g\ a = \sqcup\{b : f\ b \leq a\}$ |
| Cancelamento | $f\ (g\ a) \leq a$ | $b \sqsubseteq g\ (f\ b)$ |
| Distributividade | $f\ (b \sqcup b') = (f\ b) \vee (f\ b')$ | $g\ (a \wedge a') = (g\ a) \sqcap (g\ a')$ |
| Monotonia | $b \sqsubseteq b' \Rightarrow f\ b \leq f\ b'$ | $a \leq a' \Rightarrow g\ a \sqsubseteq g\ a'$ |

A seguir apresentamos uma lista de adjunções da lógica relacional.

$$
\begin{array}{llll}
(\cdot)^\circ \vdash (\cdot)^\circ & (h.) \vdash (h^\circ.) & (.h^\circ) \vdash (.h) & (.R) \vdash (/R) \\
(R.) \vdash (R\backslash) & \delta \vdash (\top.) & \rho \vdash (.\top) & (R\cap) \vdash (R \Rightarrow) \\
(\cdot - R) \vdash (R\cup) & & &
\end{array}
$$