Métodos Formais em Engenharia de Software

1.º Ano de Mestrado (Eng. Informática / Matemática e Computação)
Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2012/13

Exame de recurso — 18 de Julho de 2013
09h30
Sala DI 1.08

NB: *Esta prova consta de **8** alíneas todas com as mesma cotação.*

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 (1 alínea) Seja S uma relação sobre a qual apenas sabe o facto seguinte:

$$\langle \forall\, R\ ::\ \ S \cdot R = R\,\rangle \tag{F1}$$

Justifique os passos do cálculo seguinte que mostra que, necessariamente, $S = S^\circ$:

$$\begin{array}{ll}
& S^\circ \\
= & \quad \{\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \} \\
& S \cdot S^\circ \\
= & \quad \{\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \} \\
& \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= & \quad \{\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \} \\
& (S \cdot S^\circ)^\circ \\
= & \quad \{\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \} \\
& S
\end{array}$$

Que relação é S, afinal?

Questão 2 (2 alíneas) Diz-se que uma relação $A \xrightarrow{R} B \times C$ é *simples à esquerda* sse

$$\pi_1 \cdot R \quad \subseteq \quad \pi_1 / R^\circ \tag{F2}$$

e *simples à direita* sse

$$\pi_2 \cdot R \quad \subseteq \quad \pi_2 / R^\circ \tag{F3}$$

1. Mostre que R é simples se e só se for simples à esquerda e simples à direita.
2. Qualquer função que dê pares como resultado, $f : A \to B \times C$, pode ser projectada à esquerda ($\pi_1 \cdot f$) e à direita ($\pi_2 \cdot f$) e reconstituída a partir dessas projecções:

   $$f \quad = \quad \langle \pi_1 \cdot f, \pi_2 \cdot f \rangle$$

   Já com relações não é bem assim: da propriedade universal

   $$\pi_1 \cdot X \subseteq R \ \wedge\ \pi_2 \cdot X \subseteq S \quad \equiv \quad X \subseteq \langle R, S \rangle \tag{F4}$$

infere-se que a correspondente reconstituição resulta numa relação potencialmente *maior* que a original:

$$X \quad \subseteq \quad \langle \pi_1 \cdot X, \pi_2 \cdot X \rangle$$

Sendo $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$ e X a relação

$$\begin{tikzcd}
(b_1, c_1) & a_1 \arrow[l, mapsto] \arrow[dl, mapsto] \\
(b_2, c_2) & a_2 \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

represente a relação $\langle \pi_1 \cdot X, \pi_2 \cdot X \rangle$.

Mostre em seguida que, em geral, para $X = \langle \pi_1 \cdot X, \pi_2 \cdot X \rangle$ se verificar, basta que X seja simples à esquerda ou à direita.

Questão 3 (1 alínea) A função $curry$ tem tipo:

```
curry :: forall c a b. ((a,b) -> c) -> a -> (b -> c)
```

Calcule o teorema grátis de $curry$ e instancie-o para funções.

Questão 4 (1 alínea) Indentifique os adjuntos inferior e superior da seguinte conecção de Galois (relacional) que nos dá o significado do operador *complemento de domínio*,

$$\top \cdot \overline{\delta R} \supseteq S \quad \equiv \quad R \subseteq \bot / S^\circ \tag{F5}$$

e mostre que essa equivalência pode ser escrita da forma seguinte:

$$\delta\, S \subseteq \overline{\delta R} \quad \equiv \quad R \cdot S^\circ \subseteq \bot$$

Finalmente: uma das propriedades seguintes

$$\begin{array}{rcl} \overline{\delta(R \cup S)} & = & \overline{\delta R} \cup \overline{\delta S} \\ \overline{\delta(R \cup S)} & = & \overline{\delta R} \cap \overline{\delta S} \end{array}$$

verifica-se. Diga qual, justificando.

Questão 5 (3 alíneas) Preste atenção aos seguintes requisitos de um problema que foi dado em AMT:

Considere a seguinte especificação incompleta de um telemóvel, em Alloy:

```
open util/ordering[Hora]

sig Numero {}

sig Hora {}
one sig Actual in Hora {}

sig Nome {
Agenda : some Numero
}

sig Chamada { numero : one Numero, hora : one Hora }
```

Para além da agenda telefónica, onde a cada nome estão associados vários números, o modelo guarda o conjunto de chamadas efectuadas e a hora actual.

Especifique os seguintes invariantes:

1. *Um número não pode pertencer a duas pessoas diferentes.*
2. *Todos os números chamados fazem parte da agenda.*
3. *Não podem existir chamdas simultâneas.*
4. *Todas as chamadas foram feitas antes da hora actual.*

Para o modelo dado e seus invariantes (ainda que não todos) foi esboçado o diagrama relacional

$$
\begin{tikzcd}
 & Ch & & & \\
1 \arrow[r, "ac"] & Hr \arrow[u, "h^\circ"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq", near start] & Ch \arrow[l, "h"'] \arrow[ul, "id"'] \arrow[r, "n"] & Nr & \\
 & & Nr \arrow[u, "n^\circ"] \arrow[r, "Ag^\circ"'] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & Nm \arrow[u, "Ag"'] & Nr \arrow[l, "Ag^\circ"] \arrow[ul, "id"']
\end{tikzcd}
\tag{F6}
$$

assumindo as abreviaturas:

$Chamada \mapsto Ch$
$Actual \mapsto ac$
$Numero \mapsto Nr$
$hora \mapsto h$
$Hora \mapsto Hr$
$Nome \mapsto Nm$
$Agenda \mapsto Ag$
$numero \mapsto n$

1. Identifique que invariantes são captados por que triângulos ou rectângulos no diagrama e formule, acrescentando-os ao diagrama, os invariantes que faltam.

2. Um dos invariantes no diagrama pode ser alternativamente especificado por

$$n \quad \subseteq \quad Ag \cdot \top \tag{F7}$$

Justifique o facto apresentando os cálculos que derivam esta versão da que está em (F6).

3. Calcule o contrato da operação

$$\text{post-}\textsc{RemN}(ns) \quad \triangleq \quad Ag' \ = \ \neg\Phi_{ns} \cdot Ag \tag{F8}$$

que remove os números da agenda que estão no conjunto ns, onde $\neg\Phi = id - \Phi$, para qualquer coreflexiva Φ.