

Semântica

$$\langle \forall x : R : S \rangle \equiv \forall x R \Rightarrow S$$

$$\langle \exists x : R : S \rangle \equiv \exists x R \wedge S$$

Regras

$$\langle \forall x : R : \langle \forall y : S : T \rangle \rangle \equiv \langle \forall y : \langle \exists x : R : S \rangle : T \rangle \quad (7)$$

$$\langle \exists x : R : \langle \exists y : S : T \rangle \rangle \equiv \langle \exists y : \langle \exists x : R : S \rangle : T \rangle \quad (8)$$

$$\langle \forall x : x = c : T \rangle \equiv [x/c]T \quad (9)$$

$$\langle \exists x : x = c : T \rangle \equiv [x/c]T \quad (10)$$

$$\langle \forall x, y : R \wedge S : T \rangle \equiv \langle \forall x : R : \langle \forall y : S : T \rangle \rangle \quad (11)$$

$$\langle \exists x, y : R \wedge S : T \rangle \equiv \langle \exists x : R : \langle \exists y : S : T \rangle \rangle \quad (12)$$

$$\langle \forall x : R \vee S : T \rangle \equiv \langle \forall x : R : T \rangle \wedge \langle \forall x : S : T \rangle \quad (27)$$

$$\langle \exists x : R \vee S : T \rangle \equiv \langle \exists x : R : T \rangle \vee \langle \exists x : S : T \rangle \quad (28)$$

$$\langle \forall x : R : T \wedge T' \rangle \equiv \langle \forall x : R : T \rangle \wedge \langle \forall x : R : T' \rangle \quad (29)$$

$$\langle \exists x : R : T \vee T' \rangle \equiv \langle \exists x : R : T \rangle \vee \langle \exists x : R : T' \rangle \quad (30)$$

$$\langle \forall x : R : \neg T \rangle \equiv \neg \langle \exists x : R : T \rangle \quad (31)$$

$$\langle \exists x : R : \neg T \rangle \equiv \neg \langle \forall x : R : T \rangle \quad (32)$$

Relações: propriedades e classificações

$$\ker R = R^\circ . R$$

$$\text{img} R = R . R^\circ$$

$$R \text{ Reflexiva} \equiv id \subseteq R$$

$$R \text{ Correflexiva} \equiv R \subseteq id$$

$$R \text{ Inteira} \equiv id \subseteq \ker R$$

$$R \text{ Injetiva} \equiv \ker R \subseteq id$$

$$R \text{ Sobrejetiva} \equiv id \subseteq \text{img} R$$

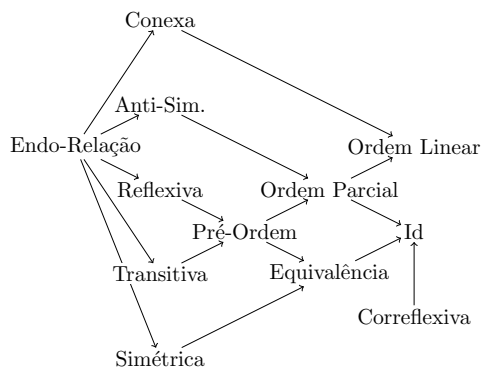
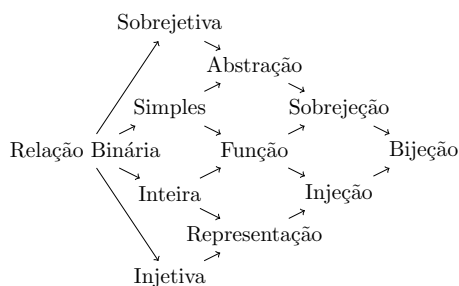
$$R \text{ Simples} \equiv \text{img} R \subseteq id$$

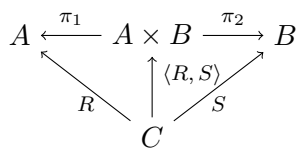
$$R \text{ Transitiva} \equiv R . R \subseteq R$$

$$R \text{ Anti-Sim.} \equiv R \cap R^\circ \subseteq id$$

$$R \text{ Simétrica} \equiv R = R^\circ$$

$$R \text{ Conexa} \equiv R \cup R^\circ = \top$$

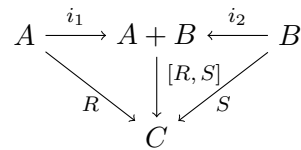




$$R \times S = \langle R.\pi_1, S.\pi_2 \rangle$$

$$\langle R, S \rangle \equiv \pi_1^\circ.R \cap \pi_2^\circ.S \quad (74)$$

$$X \subseteq \langle R, S \rangle \equiv \pi_1.X \subseteq R \wedge \pi_2.X \subseteq S \quad (75)$$



$$R + S = [i_1.R, i_2.S]$$

$$[R, S] \equiv R.i_1^\circ \cup S.i_2^\circ$$

$$X = [R, S] \equiv R = X.i_1 \wedge S = X.i_2 \quad (77)$$

Distributividades:

$$\langle R, S \rangle.f = \langle R.f, S.f \rangle \quad (78)$$

$$[\langle R, S \rangle, \langle T, V \rangle] = \langle [R, T], [S, V] \rangle \quad (79)$$

Algebra Relacional

Igualdade:

$$R = S \equiv R \subseteq S \wedge S \subseteq R \quad (68)$$

$$\equiv X \subseteq R \equiv X \subseteq S, \forall X \quad (69)$$

$$\equiv R \subseteq X \equiv S \subseteq X, \forall X \quad (70)$$

$$f = g \equiv f \subseteq g \equiv g \subseteq f \quad (56)$$

Guardanapo:

$$(f b)R(g a) \equiv b(f^\circ.R.g)a \quad (47)$$

Shunting:

$$f.R \subseteq S \equiv R \subseteq f^\circ.S \quad (54)$$

$$R.f^\circ \subseteq S \equiv R \subseteq S.f \quad (55)$$

Universais \cup e \cap :

$$X \subseteq R \cap S \equiv X \subseteq R \wedge X \subseteq S \quad (64)$$

$$R \cup S \subseteq X \equiv R \subseteq X \wedge S \subseteq X \quad (65)$$

Monotonia:

Os operadores \cdot , $(\cdot)^\circ$, \cap e \cup são monótonos sobre \subseteq .

Relator:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \dashrightarrow & G A \\
 R \downarrow & & \downarrow G R \\
 B & \dashrightarrow & G B
 \end{array}$$

Diz-se que G é um *relator* se satisfaz:

$$G id_A = id_{G A} \quad G (R.S) = (G R).(G S)$$

$$G R^\circ = (G R)^\circ \quad R \subseteq S \Rightarrow G R \subseteq G S$$

Seta de Reynolds:

$$f(R \leftarrow S)g \equiv f.S \subseteq R.g \quad (92)$$

$$\equiv S \subseteq f^\circ.R.g$$

$$\equiv \langle \forall b, a : b S s : (f b)R(g a) \rangle$$

Correflexivas:

Um predicado unário p é codificado por uma relação correflexiva:

$$z \Phi_p x \equiv z = x \wedge (p z) \quad (105)$$

Correflexivas como condições laterais:

$$z (\Phi_p.\top) x \equiv (p z)$$

$$z (\top.\Phi_q) x \equiv (q x)$$

Sejam Φ e Ψ relações corre reflexivas, então:

Simetria e Transitividade:

$$\Phi \equiv \Phi^\circ \equiv \Phi.\Phi \quad (111)$$

Pré e Pós-Condição:

$$R.\Phi \equiv R \cap \top.\Phi \quad (117)$$

$$\Psi.R \equiv R \cap \Psi.\top \quad (118)$$

Select, Project:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ A & \xrightarrow{\sigma_{\Psi, \Phi} R} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{\pi_{g, f} R} & C \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Psi, \Phi} R &\equiv \Psi.R.\Phi & (119) \\ &\equiv \{(b, a) : b R a \wedge (\psi b) \wedge (\phi a)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{g, f} R &\equiv g.R.f^\circ & (122) \\ &\equiv \{(g b, f a) : b R a\} \end{aligned}$$

Fechos:

$$R.\Phi \subseteq S \equiv R.\Phi \subseteq S.\Phi \quad (113)$$

$$\Phi.R \subseteq S \equiv \Phi.R \subseteq \Phi.S \quad (114)$$

Conjunção:

$$\Phi \cap \Psi \equiv \Phi.\Psi \quad (112)$$

Condições laterais:

$$\Phi \subseteq \top.\Psi \stackrel{(115)}{\equiv} \Phi \subseteq \Psi \stackrel{(116)}{\equiv} \Phi \subseteq \Psi.\top$$

Propriedades Calculacionais:

$$\Phi_{p \wedge q} \equiv \Phi_p.\Phi_q \quad (106)$$

$$\Phi_{p \vee q} \equiv \Phi_p \cup \Phi_q \quad (107)$$

$$\Phi_{\neg p} \equiv id - \Phi_p \quad (108)$$

$$\Phi_{True} \equiv id \quad (109)$$

$$\Phi_{False} \equiv \perp \quad (110)$$

Domínio e Contradomínio

Definições:

$$\delta R \equiv (ker R) \cap id \quad \rho R \equiv (img R) \cap id \quad (125)$$

Universais e Eliminação:

$$\delta R \subseteq \Phi \equiv R \subseteq \top.\Phi \quad \top.\delta R \equiv \top.R \quad (126,128)$$

$$\rho R \subseteq \Phi \equiv R \subseteq \Phi.\top \quad \rho R.\top \equiv R.\top \quad (127,129)$$

Cálculo:

$$\delta R = \rho(R^\circ) \quad (130)$$

$$\delta(R.S) = \delta(\delta R.S) \quad (131)$$

$$\rho(R.S) = \rho(R.\rho S) \quad (132)$$

$$R = R.\delta R = \rho R.R \quad (133, 134)$$

Contratos, Dep. Funcionais e Invariantes

Definições:

Uma relação R satisfaz uma dependência funcional (FD) $g \rightarrow f$, notada por $g \xrightarrow{R} f$ se $\pi_{f, g} R$ é simples.

Propriedades:

$$g \xrightarrow{R} f \equiv \ker(g.R^\circ) \subseteq \ker f \quad (136)$$

$$h \xrightarrow{S.R} g \Leftarrow h \xrightarrow{S} f \wedge f \xrightarrow{R} g \quad (137)$$

Vamos então estender a noção de declaração de tipos para predicados, escrevendo: $\phi_B \xleftarrow{f} \phi_A$ para representar:

$$f.\phi_A \subseteq \phi_B.f \quad (143)$$

$$\equiv f.\phi_A \subseteq \phi_B.\top \quad (144)$$

$$\equiv \rho(f.\phi_A) \subseteq \phi_B \quad (145)$$

Extended Type Checking

Definições:

$$p \rightarrow f, g \equiv f.\phi_p \cup g.\phi_{\neg p} \quad (150)$$

$$\phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_1} \cup \phi_{A_2} \equiv \phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_1} \wedge \phi_B \xleftarrow{f} \phi_{A_2} \quad (147)$$

$$\phi_{B_1}.\phi_{B_2} \xleftarrow{f} \phi_A \equiv \phi_{B_1} \xleftarrow{f} \phi_A \wedge \phi_{B_2} \xleftarrow{f} \phi_A \quad (148)$$

$$\phi_B \xleftarrow{p \rightarrow f, g} \phi_A \equiv \phi_B \xleftarrow{f} \phi_A.\phi_p \wedge \phi_B \xleftarrow{g} \phi_A.\phi_{\neg p} \quad (151)$$

$$\phi_B \xleftarrow{g.h} \phi_A \Leftarrow \phi_B \xleftarrow{g} \psi \wedge \psi \xleftarrow{h} \phi_A \quad (153)$$

$$\psi_1 \times \psi_2 \xleftarrow{\langle f, g \rangle} \phi \equiv \psi_1 \xleftarrow{f} \phi \wedge \psi_2 \xleftarrow{g} \phi \quad (155)$$

Propriedades Extra

$$!.f \equiv !$$

$$\top \equiv !^\circ.!$$

Teoremas Grátis

Seja $\phi : t$ uma função de tipo t , V o conjunto da variáveis de tipos de t , $\{R_v\}_{v \in V}$ uma família de relações e \mathcal{R}_t definida indutivamente por:

$$\mathcal{R}_v = R_v \quad (84)$$

$$\mathcal{R}_{F(t_1, \dots, t_n)} = F(\mathcal{R}_{t_1}, \dots, \mathcal{R}_{t_n}) \quad (85)$$

$$\mathcal{R}_{t_2 \leftarrow t_1} = \mathcal{R}_{t_2} \leftarrow \mathcal{R}_{t_1} \quad (86)$$

Então $\phi \mathcal{R}_t \phi$.

Alguns casos de interesse seguem. Note que as relações R_x , para qualquer x , estão universalmente quantificadas.

$$\text{map} :: (B^* \leftarrow A^*) \leftarrow (B \leftarrow A) \quad \cdot \quad \forall f, g : f.R_a \subseteq R_b.g \Rightarrow (\text{map } f).R_a^* \subseteq R_b^*.(\text{map } g)$$

$$\text{filter} :: (A^* \leftarrow A^*) \leftarrow (\text{Bool} \leftarrow A) \quad \cdot \quad \forall f, g : f.R_a \subseteq g \Rightarrow (\text{filter } f).R_a^* \subseteq R_a^*.(\text{filter } g)$$

$$(\cdot) :: (B \leftarrow F A) \leftarrow (B \leftarrow G (A, B)) \quad \cdot \quad \forall f, g : f.(G R_a \times R_b) \subseteq R_b.g \Rightarrow (\cdot f).(F R_a) \subseteq R_b.(\cdot g)$$

$$! :: 1 \leftarrow A \quad \cdot \quad !.R_a \subseteq !$$

$$c(X/Y)a \equiv \langle \forall b : a Y b : c X b \rangle \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ X/Y \swarrow & \uparrow Y & \\ C & \longleftarrow & B \end{array} \quad (195)$$

$$c(X \setminus Y)a \equiv \langle \forall b : b X a : b Y c \rangle \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ X \setminus Y \swarrow & \downarrow Y & \\ C & \xrightarrow{X} & B \end{array} \quad (200)$$

$$X.f = X/f^\circ \quad X/\perp = \top \quad (196,197)$$

$$\top/Y = \top \quad X \setminus Y \equiv (Y^\circ/X^\circ)^\circ \quad (198,199)$$

Conexões de Galois

Dizemos que duas funções (relações) f e g são adjuntas, e notamos por $f \vdash g$, quando:

$$f b \leq a \equiv b \sqsubseteq g a \quad (184)$$

ou, em *pointfree*:

$$f^\circ . \leq = \sqsubseteq . g \quad (185)$$

Seguem algumas leis úteis (onde $\sqcap, \sqcup, \vee, \wedge$ denotam supremos e ínfimos):

Definição	$f b = \wedge \{a : b \sqsubseteq g a\}$	$g a = \sqcup \{b : f b \leq a\}$
Cancelamento	$f (g a) \leq a$	$b \sqsubseteq g (f b)$
Distributividade	$f (b \sqcup b') = (f b) \vee (f b')$	$g (a \wedge a') = (g a) \sqcap (g a')$
Monotonia	$b \sqsubseteq b' \Rightarrow f b \leq f b'$	$a \leq a' \Rightarrow g a \sqsubseteq g a'$

A seguir apresentamos uma lista de adjunções da lógica relacional.

$$\begin{array}{llll} (\cdot)^\circ \vdash (\cdot)^\circ & (h.) \vdash (h^\circ.) & (.h^\circ) \vdash (.h) & (.R) \vdash (/R) \\ (R.) \vdash (R \setminus) & \delta \vdash (\top.) & \rho \vdash (\cdot \top) & (R \cap) \vdash (R \Rightarrow) \\ (\cdot - R) \vdash (R \cup) & & & \end{array}$$

Exemplificando o caso da composição, temos:

$$X.R \subseteq Y \equiv X \subseteq Y/R \quad (202)$$

$$R.X \subseteq Y \equiv X \subseteq R \setminus Y \quad (203)$$

Tornando imediato que $(R.)$ e $(.R)$ distribuem pela união (adjuntos inferiores) e $(R \setminus)$ e $(/R)$ distribuem pela intersecção (adjuntos superiores).