

Métodos Formais em Engenharia de Software

1.º Ano de Mestrado de Informática, de Eng. Informática e de Matemática e Computação da Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2010/11

Exame de recurso — 21 de Julho 2011
15h30
Sala DI 1.07

NB: Esta prova consta de 8 alíneas todas com a mesma cotação. A referência a equações do formulário ou da tutorial que foi seguida na disciplina deve ser precedida das letras F ou T, por exemplo (F12), (T23). Outras referências (eg. a transparências) deverão ser feitas de forma explícita.

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 (1 alínea) Apresente justificações para os passos da seguinte prova da igualdade $img f = f \cdot \top \cap id$:

$$\begin{array}{l}
 X \subseteq img f \\
 \Leftrightarrow \{ \dots\dots\dots \} \\
 \rho X \subseteq \rho f \wedge X \subseteq id \\
 \Leftrightarrow \{ \dots\dots\dots \} \\
 X \subseteq \rho f \cdot \top \wedge X \subseteq id \\
 \Leftrightarrow \{ \dots\dots\dots \} \\
 X \subseteq f \cdot \top \cap id \\
 \therefore \{ \dots\dots\dots \} \\
 img f = f \cdot \top \cap id
 \end{array}$$

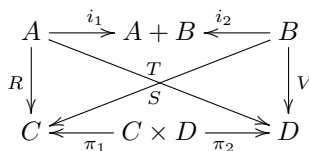
Questão 2 (1 alínea) Sabendo que $\top = !^\circ \cdot !$ e que qualquer função f satisfaz a propriedade $f = f \cdot f^\circ \cdot f$ mostre que

$$R \cdot \top \subseteq S \cdot \top \Leftrightarrow R \subseteq S \cdot \top \tag{1}$$

Questão 3 (1 alínea) Apresente justificações para o seguinte cálculo da generalização da lei da troca a relações:

$$\langle \langle R, S \rangle, \langle T, V \rangle \rangle = \langle \langle R, T \rangle, \langle S, V \rangle \rangle \tag{2}$$

Diagrama:



Prova:

$$\begin{aligned}
 & \langle [R, S], [T, V] \rangle = \langle [R, T], [S, V] \rangle \\
 \Leftrightarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle R, S \rangle = \langle [R, T], [S, V] \rangle \cdot i_1 \wedge \langle T, V \rangle = \langle [R, T], [S, V] \rangle \cdot i_2 \\
 \Leftrightarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle R, S \rangle = \langle [R, T] \cdot i_1, [S, V] \cdot i_1 \rangle \wedge \langle T, V \rangle = \langle [R, T] \cdot i_2, [S, V] \cdot i_2 \rangle \\
 \Leftrightarrow & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle R, S \rangle = \langle R, S \rangle \wedge \langle T, V \rangle = \langle T, V \rangle
 \end{aligned}$$

Questão 4 (1 alínea) Seja

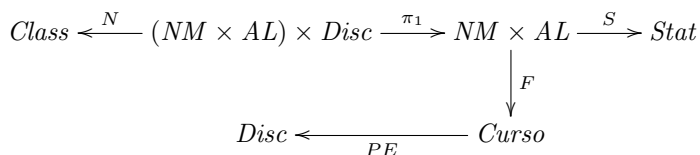
$$(\$) :: (a \rightarrow b) \rightarrow a \rightarrow b$$

a função de ordem superior que torna explícita a aplicação de uma função a um dado argumento. Quer dizer, $f\$x$ designa o mesmo que $f x$ ou $f(x)$. Mostre que a propriedade

$$(f\$) \cdot r = ((f \cdot r)\$) \tag{3}$$

decorre do teorema grátis de (\$).

Questão 5 (3 alíneas) Há anos foi feita uma análise do modelo de informação dos SAUM com vista à formalização do RIAPA (Regulamento Interno de Avaliação e Passagem de Ano) da altura. Apresenta-se de seguida um fragmento (muito!) simplificado do esquema da base de dados, sob a forma de um diagrama relacional,



em que (ordem alfabética):

- | | |
|--|---|
| AL — ano lectivo | N — notas finais |
| $Class$ — classificação | NM — número mecanográfico |
| $Curso$ — curso | PE — planos de estudos |
| $Disc$ — disciplina | $Stat$ — possíveis estatutos dos alunos |
| F — cursos frequentados, por aluno e ano lectivo | S — estatuto de cada aluno, por ano lectivo |

1. Acrescente ao diagrama o rectângulo que capta o invariante

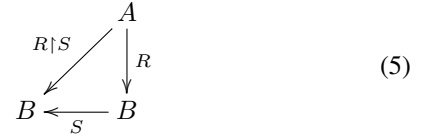
$$\pi_2 \cdot \langle N, \pi_2 \rangle \subseteq PE \cdot F \cdot \pi_1 \tag{4}$$

e diga que propriedade desejável do sistema é que ele exprime, mediante conversão de (4) num predicado após introdução de variáveis.

2. Suponha que uma directiva comunitária impõe que todas as classificações em N sejam uniformizadas para percentagens, isto é, que N se converta em $N' = f \cdot N$ onde f faz essa transformação. Mostre (formalmente) que o invariante acima continua a ser válido após essa operação.

3. Nas aulas foi referido o combinador relacional

$$R \dagger S \triangleq R \cap S / R^\circ \quad \text{tipado pelo diagrama:}$$



Tem-se, pois, com variáveis:

$$b(R \dagger S)a \Leftrightarrow bRa \wedge \langle \forall b' : b'Ra : bSb' \rangle$$

Admitindo a existência da relação $Class \xleftarrow{\leq} Class$ que ordena classificações, recorra ao combinador acima para construir a relação $Class \xleftarrow{X} NM$ que associa a cada aluno (NM) a melhor nota do seu percurso académico.

Questão 6 (1 alínea) A sobreposição de relações

$$R \dagger S = S \cup R \cap \perp / S^\circ, \quad (6)$$

é um combinador muito útil para exprimir informação condicional em modelos relacionais sem se ter que recorrer ao λ -calculus ou cálculo de predicados. Baseando-se em propriedades que conhece da álgebra relacional, mostre que

$$R \dagger \top = \top \quad (7)$$

$$R \dagger \perp = R \quad (8)$$

$$(R \cup Q) \dagger S = (R \dagger S) \cup (Q \dagger S) \quad (9)$$

RESOLUÇÃO: Da terceira igualdade:

$$\begin{aligned} & (R \cup Q) \dagger S \\ = & \quad \{ (6) \} \\ & S \cup ((R \cup Q) \cap \perp / S^\circ) \\ = & \quad \{ (\cap R) \vdash (R \Rightarrow) - \text{GC lower adjoint distributivity} \} \\ & S \cup ((R \cap \perp / S^\circ) \cup (Q \cap \perp / S^\circ)) \\ = & \quad \{ (\cup) \vdash \Delta - \text{GC lower adjoint distributivity} \} \\ & (S \cup R \cap \perp / S^\circ) \cup (S \cup Q \cap \perp / S^\circ) \\ = & \quad \{ (6) \text{ twice} \} \\ & (R \dagger S) \cup (Q \dagger S) \end{aligned}$$

□