Métodos Formais em Engenharia de Software

1.º Ano de Mestrado de Informática, de Eng. Informática e de Matemática e Computação da Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2010/11

Prova de avaliação individual — 10 de Fevereiro 2011
09h00
Sala DI 1.08

NB: *Esta prova consta de **8** alíneas todas com as mesma cotação. A referência a equações do formulário ou da tutorial que foi seguida na disciplina deve ser precedida das letras* F *ou* T*, por exemplo (F12), (T23). Outras referências (eg. a transparências) deverão ser feitas de forma explícita.*

PROVA COM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 (1 alínea) Dizer que duas relações têm domínios disjuntos pode escrever-se de duas formas diferentes mas equivalentes:

$$R \cdot S^\circ \subseteq \bot \quad \Leftrightarrow \quad \delta\, R \cap \delta\, S = \bot \tag{1}$$

Apresente todas as justificações que entenda necessárias em cada passo do cálculo que se segue dessa equivalência:

$$
\begin{array}{ll}
& R \cdot S^\circ \subseteq \bot \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \delta\,(R \cdot S^\circ) \subseteq \bot \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \delta\, R \cdot S^\circ \subseteq \bot \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \rho\,(\delta\, R \cdot S^\circ) \subseteq \bot \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \rho\,(\delta\, R \cdot \delta\, S) \subseteq \bot \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \delta\, R \cap \delta\, S = \bot
\end{array}
$$

Questão 2 (3 alíneas) Inventemos um novo combinador para a álgebra relacional,

$$R \,\square\, S \quad \triangleq \quad R \cdot \top \cdot S \tag{2}$$

que designaremos por "rectângulo de R e S".

1. Indique o tipo deste combinador através de um diagrama e mostre que $b(R \,\square\, S)a$ é equivalente a $b \in rng\ R\ \wedge\ a \in dom\ S$, onde dom e rng são tais que $\Phi_{dom\ X} = \delta\, X$ e $\Phi_{rng\ X} = \rho\, X$.
2. Mostre que $R \subseteq \Psi \,\square\, \Phi$ implica $\Phi \subseteq R \rightharpoonup \Psi$.
3. Uma relação P diz-se um *ponto* sempre que o rectângulo $P \,\square\, P$ é uma coreflexiva. Mostre que a imagem de uma função constante $\underline{k}$ é um ponto.

Questão 3 (2 alíneas) O diagrama relacional que se segue

$$
\begin{tikzcd}
ISBN \arrow[d, "M"'] & ISBN \times UID \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "R"] \arrow[l, phantom, "\supseteq", shift right=6ex] \arrow[r, phantom, "\subseteq", shift right=6ex] & UID \arrow[d, "N"] \\
Title \times Publisher \arrow[r, "\top"'] & Date & Name \times Address \times Phone \arrow[l, "\top"]
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

capta as três principais relações de um modelo abstracto de uma biblioteca pública, a saber:

- M — regista os livros disponíveis, identificados pelo seu $ISBN$;
- N — regista os utentes da biblioteca, identificados pelo seu UID;
- R — regista as datas de início dos empréstimos correntes.

Os dois rectângulos impõem limites à relação R:

- Não se podem emprestar livros que não existem (rectângulo à esquerda);
- Só podem fazer empréstimos utentes conhecidos (rectângulo à direita).

Responda então às duas alíneas que se seguem:

1. Mostre que a conjunção dos dois rectângulos, $R \subseteq \top \cdot M \cdot \pi_1 \ \wedge \ R \subseteq \top \cdot N \cdot \pi_2$ é equivalente à asserção

   $$R^\circ \quad \subseteq \quad \langle M^\circ \cdot \top, N^\circ \cdot \top \rangle \tag{4}$$

   Desenhe-a sob a forma de um diagrama.

2. Pretende-se vir a implementar M, R e N como tabelas de uma base de dados relacional. Antes disso, porém, modelaram-se operações como, por exemplo, a que registará novos empréstimos (K) nessa base de dados:

   $$borrow(K, (M, R, N)) \quad \triangleq \quad (M, R \cup K, N) \tag{5}$$

   É fácil de ver que a pré-condição

   $$\text{pre-}borrow(K, (M, R, N)) \quad \triangleq \quad R \cdot K^\circ \subseteq id$$

   regista uma condição necessária à manutenção de (3) (porquê?) mas não suficiente. Calcule, para um rectângulo em (3) à sua escolha, a correspondente cláusula a acrescentar a pre-$borrow$.

Questão 4 (1 alínea) Sempre que duas funções f, g com o mesmo tipo são tais que $f\ a \leq g\ a$, para todo o a, diz-se que f é *pontualmente menor ou igual* a g e escreve-se $f \stackrel{.}{\leq} g$. Quer dizer:

$$
f \stackrel{.}{\leq} g \quad \triangleq \quad f \subseteq (\leq) \cdot g \qquad \text{cf. diagrama} \qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\subseteq"] & \\
B & & B \arrow[ll, "\leq"]
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

Mostre que a implicação

$$f \stackrel{.}{\leq} g \quad \Rightarrow \quad (map\ f) \stackrel{.}{\leq}^{\star} (map\ g) \tag{7}$$

decorre do *teorema grátis* da função de ordem superior $map\ :\ (a \to b) \to a^\star \to b^\star$.

Questão 5 (1 alínea) Mostre que $\rho\, R \xleftarrow{R} \delta\, R$ se verifica. Contudo, a pré-condição mais fraca $R \mathbin{\setminus\!\!\!\bullet} (\rho\, R)$ não é $\delta\, R$ mas sim id. Explique porquê.
