Ficha de Exercícios 1: Arquitecturas para Sistemas Reactivos

Luís Soares Barbosa

1 Sistemas de Transição

Exercício I.1

Dados dois sistemas de transição $\langle S_1, T_1\rangle$ e $\langle S_2, T_2\rangle$ sobre $\mathcal{N}$, diz-se que dois estados p e q são *mutuamente similares* sse

$$p \doteqdot q \ \equiv \ p \lesssim q \wedge q \lesssim p$$

1. Mostre que $\doteqdot$ é uma relação de equivalência.
2. Compare esta relação com a relação de bissimilaridade $\sim$ e com a noção canónica de equivalência entre autómatos.

Exercício I.2

Um simulação é trivial se é vazia ou composta apenas por pares triviais (i.e., pares de estados a partir dos quais não existem transições) ou, ainda, se contém pelo menos um par trivial que não é acessível a partir de pelo menos um par não trivial contido em S. No sistema de transição seguinte

$$\{\langle 1, z, 2\rangle, \langle 1, x, 3\rangle, \langle 4, z, 5\rangle, \langle 6, z, 7\rangle, \langle 6, x, 8\rangle, \langle 6, x, 9\rangle\}$$

indique os pares triviais e enumere todas as simulações não triviais que podem nele ser definidas.

Exercício I.3

Considere o sistema de transição caracterizado pela relação seguintes:

$$\{\langle 1, a, 2\rangle, \langle 1, a, 3\rangle, \langle 2, a, 3\rangle, \langle 2, b, 1\rangle, \langle 3, a, 3\rangle, \langle 3, b, 1\rangle, \langle 4, a, 5\rangle, \langle 5, a, 5\rangle, \langle 5, b, 6\rangle, \langle 6, a, 5\rangle, \langle 7, a, 8\rangle, \langle 8, a, 8\rangle, \langle 8, b, 7\rangle\}$$

Mostre ou refute a afirmação $1 \sim 4 \sim 6 \sim 7$.

Exercício I.4

Mostre que o conjunto de todas as bissimulações entre dois sistemas de transição forma um *reticulado completo*, ordenado pela inclusão, cujo topo é a relação de *bissimilaridade* $\sim$.

Exercício I.5

Um *traço* de um sistema de transição é uma sequência de nomes $s \in \mathcal{N}^*$ para os quais existe uma sequência de estados $s_0, s_1, \ldots$ tal que

$$s_0 \xrightarrow{a_0} s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{s_n} s_n$$

com $s = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.

Um traço é dito *completo* se, nas condições da definição anterior, conduzir a um estado a partir do qual não existem mais transições.

1. Mostre que dois estados bisimilares exibem os mesmo traços.
2. Será que também exibem os mesmos traços completos? Porquê?

Exercício I.6

Uma relação R entre os estados de um sistema de transição diz-se uma *bisimulação à palavra* se, sempre que $\langle p, q \rangle \in R$ e $s \in \mathcal{N}^*$, se tem

$$p' \xleftarrow{s} p \;\Rightarrow\; \langle \exists\, q' \;:\; q' \in S_2 : \; q' \xleftarrow{s} q \,\wedge\, \langle p', q' \rangle \in R \rangle$$
$$q' \xleftarrow{s} q \;\Rightarrow\; \langle \exists\, p' \;:\; p' \in S_1 : \; p' \xleftarrow{s} p \,\wedge\, \langle p', q' \rangle \in R \rangle$$

1. Defina formalmente a relação $\xleftarrow{s}$, para $s \in \mathcal{N}^*$
2. Dois estados dizem-me *bisimilares à palavra* sse existir uma bisimulação à palavra que os contenha. Mostre que dois estados p e q são *bisimilares à palavra* sse $p \sim q$.

2 Modelação de Processos

Exercício I.7

Considere a seguinte descrição de um *buffer* de duas posições com sinalizadores. Note que o processo é construido a partir de um *buffer* simples (de 1 posição) que lida igualmente com sinalizadores. Em particular, sinaliza (em $\overline{r}$) a recepção de uma mensagem. Do mesmo modo, aguarda a confirmação (t) de que a transmissão por si realizada se completou com sucesso.

$$Bs \triangleq\!= \textsf{new}\,\{mo, mi\}\;(B(in, mo, mi, r) \mid B(mo, out, t, mi))$$
$$B(in, out, t, r) \triangleq in.\overline{out}.t.\overline{r}.B$$

1. Esboce o diagrama de sincronização do processo Bs.
2. Compare o comportamento de B e Bs (em particular, verifique se Bs se comporta, de facto, como um *buffer* de duas posições). Fundamente a sua resposta construindo e comparando os respectivos grafos de transições.
3. Procure uma solução para o problema detectado (se ele existir!) e trace de novo o grafo de transições relativo a essa solução.
4. Explique como a especificação inicial (ou a sua nova solução) pode ser adaptada para descrever *buffers* com um número qualquer (mas previamente fixo) de posições.
5. Repita a alínea anterior para *buffers* com um número arbitrário (não conhecido à partida) de posições.

Exercício I.8

Considere a seguinte descrição de um *buffer* de uma posição, bi-direcional, *i.e.*, capaz de transmitir um número arbitrário de mensagens em qualquer direcção.

$$BT(in_1, in_2, out_1, out_2) \;\triangleq\; in_1(x).\overline{out_1}\langle x \rangle.BT + in_2(x).\overline{out_2}\langle x \rangle.BT$$

1. Construa um *buffer* de duas posições, igualmente bi-direcional, por composição paralela de duas réplicas do processo BT.
2. Esboce o respectivo diagrama de sincronização.

3. Calcule o seu grafo de transições.

Exercício I.9

Considere a especificação seguinte de um sistema de controlo de um cruzamento entre uma estrada e uma via férrea. As acções car e $train$ representam a aproximação do cruzamento por um automóvel ou um comboio, respectivamente. Por seu lado, up e dw representam a abertura e o fecho da cancela sobre a estrada, enquanto $green$ e red modelam a recepção de um sinal de avanço ou paragem pelo comboio. Finalmente, as acções $\overline{ccross}$ e $\overline{tcross}$ traduzem, respectivamente, a travessia efectiva do cruzamento por um automóvel ou um comboio.

$$\begin{aligned} Road &\triangleq car.up.\overline{ccross}.\overline{dw}.Road \\ Rail &\triangleq train.green.\overline{tcross}.\overline{red}.Rail \\ Signal &\triangleq \overline{green}.red.Signal + \overline{up}.dw.Signal \end{aligned}$$

$$C \triangleq \mathsf{new}\,\{green, red, up, dw\}\ (Road \mid Rail \mid Signal)$$

1. Explique o comportamento deste processo e esboce o respectivo diagrama de sincronização.
2. Calcule o grafo de transições correspondente ao processo C

Exercício I.10

Considere a seguinte especificação de uma máquina de venda automática de chocolates, que fornece dois tipos de chocolates (grande e pequeno) ao preço de 1 e 2 euros, respectivamente.

$$VM \triangleq i2.grd.recolhe.VM + i1.peq.recolhe.VM$$

Assim, por exemplo, para comprar um chocolate pequeno, o utilizador é suposto começar por introduzir uma moeda de 1 euro, accionar o botão peq e recolher a sua compra na saída da máquina.

1. Modifique VT de modo a que, após ter inserido 1 euro, seja possível ou recolher um chocolate pequeno ou voltar a inserir outra moeda de 1 euro e recolher um chocolate grande.
2. Modifique VT de modo a que, após ter inserido 2 euros, seja possível recolher um chocolate grande ou dois pequenos.

Exercício I.11

Um n-*trigger*, para $n > 1$, é um dispositivo, tipicamente utilizado em votações electrónicas, com n portas de entrada, a_1 a a_n, e uma porta de saída $\overline{s}$. Logo que detecte ter recebido um sinal em mais de metade das portas de entrada, o n-*trigger* emite um sinal em $\overline{s}$ (que, eventualmente despoletará outro processo), e termina. Cada porta a_i recebe apenas um sinal e assume-se que estes podem chegar às diferentes portas de entrada por qualquer ordem.

1. Especifique um 3-*trigger* (*i.e.*, um *trigger* com 3 portas de entrada).
2. Especifique um n-*trigger*, para n arbitrário.

Exercício I.12

Seja $A(a) \triangleq a.A$ e $B(b) \triangleq \overline{b}.B$. Calcule as derivações imediatas dos processos seguintes:

1. $A + B$
2. $A + B\langle a \rangle$

3. $A \mid B$
4. $A \mid B\langle a\rangle$
5. $\{a/b\}\,(A \mid B)$
6. $\mathsf{new}\,\{a\}\ (A \mid B\langle a\rangle)$

Exercício I.13

Seja $A(a,b,c,d) \triangleq \overline{a}.b.A + \overline{c}.d.A$. Construa os grafos de transições correspondentes aos processos seguintes:

1. A
2. $\mathsf{new}\,\{a\}\ A$

Exercício I.14

Qual é o conjunto de derivações do processo $T \triangleq a.(b.\mathbf{0} \mid T)$?

Exercício I.15

Construa os grafos de transições correspondentes aos processos seguintes, assumindo que a variável x toma valores no conjunto $\{1,2,3\}$.

1. $a(x).\overline{b}\langle x\rangle.\mathbf{0}$
2. $\mathsf{new}\,\{a\}\ (\overline{a}\langle 2\rangle.\mathbf{0} \mid a(x).\overline{b}\langle x\rangle.\mathbf{0})$
3. $a(x).(\mathsf{if}\ x=2\ \mathsf{then}\ \overline{b}\langle x\rangle.\mathbf{0}\ \mathsf{else}\ \overline{c}\langle x\rangle.\mathbf{0})$
4. $\mathsf{new}\,\{a\}\ (\overline{a}\langle 2\rangle.\mathbf{0} \mid \mathsf{if}\ x=2\ \mathsf{then}\ \overline{b}\langle x\rangle.\mathbf{0}\ \mathsf{else}\ \overline{c}\langle x\rangle.\mathbf{0})$

Exercício I.16

Compare os grafos de transições dos processos seguintes, e discuta até que ponto será razoável considerar equivalentes os comportamentos exibidos.

$$P \triangleq a.P + \tau.b.P$$
$$Q \triangleq a.Q + b.Q$$

Exercício I.17

Reporte-se à especificação da *máquina de azar* feita nas aulas. Trata-se de um dispositivo que por vezes se encontra em salas de jogos e que, externamente, disponibiliza três acções: m (entrada de uma moeda), $\overline{win}\langle x\rangle$ (recepção de x moedas) e $\overline{loss}$ (perda da moeda). Considere a seguinte especificação de uma máquina deste tipo (**[?]**):

$$IO \triangleq m.\overline{bank}.(lost.\overline{loss}.IO + rel(x).\overline{win}\langle x\rangle.IO)$$
$$B_n \triangleq bank.\overline{max}\langle n+1\rangle.left(x).B_x$$
$$Dc \triangleq max(z).(\overline{lost}.\overline{left}\langle z\rangle.Dc + \sum_{1\le x\le z} \overline{rel}(x).\overline{left}\langle z-x\rangle.Dc)$$

$$M_n \triangleq \mathsf{new}\,\{bank, max, left, rel\}\ (IO \mid B_n \mid Dc)$$

1. Explique o comportamento do processo M_n e esboce o respectivo diagrama de sincronização.
2. Mostre que um jogador pode efectivamente ganhar uma detrminada quantia de moedas.
3. Mostre que um jogador pode perder o jogo (*i.e.*, não receber nada)
4. Poderá concluir desta especificação qual das duas situações anteriores é mais provável verificar-se? Porquê?

Exercício I.18

Considere (mais uma!) especificação de um *buffer*, onde m e s designam, respectivamente, uma mensagem e uma sequência de mensagens. Assuma o significado usual para pas funções len, $:$, $head$ e $tail$ sobre sequências.

$$B_s \triangleq in(m).B_{m:s} + (\mathsf{if}\, len(s) > 0 \,\mathsf{then}\, \overline{out}\langle head(s)\rangle.B_{tail(s)})$$

1. Explique se o *buffer* tem ou não capacidade limitada e a que disciplina de ordenação obedece (*i.e.*, LIFO ou FIFO).
2. Altere a especificação apresentada com base nos seguintes requisitos informais:
   Devem ser considerados dois sinais adicionais f (de "flush") e t (de "stop"). Após receber um f, o buffer *começa a despejar todas as mensagens que tinha armazenadas e, enquanto o faz, não pode aceitar novas entradas. Após receber um t, o* buffer *pode continuar a aceitar mais mensagens, mas não lhe é permitido que as transmita. Dois segundos depois regressa ao estado normal de operação, aceitando e transmitindo mensagens.*

   Especifique este novo *buffer*. Tenha o cuidado de prever a situação em que o *buffer* recebe um t enquanto está a despejar-se (em resposta a um f prévio). De que forma vai tratar o requisito *dois segundos depois ...* ?

Exercício I.19

Considere a seguinte especificação de um sistema de comunicação com possibilidade de perda de mensagens.

$$\begin{aligned} T &\triangleq ok.send(x).\overline{s}\langle x\rangle.T \\ R &\triangleq r(x).\overline{receive}\langle x\rangle.R \\ M &\triangleq \overline{ok}.s(x).(\overline{r}\langle x\rangle.M + \tau.M) \end{aligned}$$

$$S \triangleq \mathsf{new}\,\{ok, s, r\}\ (T \mid M \mid R)$$

1. Mostre que, de facto, se podem perder mensagens.
2. Converta a especificação para a linguagem base, assumindo que as mensagens consideradas são caracteres.

Exercício I.20

Considere a seguinte especificação de uma fila de valores booleanos Q, com uma acção de sinalização $\overline{no}$ que indica fila vazia.

$$QB \triangleq \mathsf{new}\, m\ (Q_1 \mid Q_2)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &\triangleq in(x).\overline{m}\langle x\rangle.Q_1 \\ Q_2 &\triangleq m(x).\overline{out}\langle x\rangle.Q_2 + \overline{no}.Q_2 \end{aligned}$$

1. Esboce o respectivo diagrama de sincronização.
2. Calcule o grafo de transições correspondente.
3. Defina um processo LG que tenta ler dois valores booleanos de QB e fornecer a sua conjunção ou disjunção, conforme pedido. Caso QB retorne $\overline{no}$ o valor comunicado por LG ao seu ambiente deve ser a constante $\perp$.
4. Componha em paralelo os processos QB e LG de forma a obter o comportamento esperado. Trace o diagrama de sincronização correspondente.

Exercício I.21

Suponha que um colega seu justificou a equivalência entre os comportamentos exibidos pelos processos $I \triangleq (\textsf{if}\, b\, \textsf{then}\, P) \mid Q$ e $J \triangleq \textsf{if}\, b\, \textsf{then}\, (P \mid Q)$ usando o seguinte argumento: *Quando se faz a tradução de ambos para a linguagem base, o construtor condicional desaparece. Portanto, apenas permanecem as traduções de P e Q.*

Está de acordo? Em caso afirmativo tente fornecer uma prova formal, caso contrário exiba um contra-exemplo. (SUGESTÃO: use o facto, que provaremos mais tarde, de o processo **0** ser o elemento neutro da composição paralela.)

Exercício I.22

Um *repetidor* é um processo definido como

$$R \triangleq a(x).R_x$$
$$R_x \triangleq \overline{z}\langle x\rangle.R_x + a(y).R_y$$

Assuma que o universo de valores para este processo se restringe aos booleanos.

1. Esboce o grafo de transições de R.
2. Seja $E \frown F \stackrel{\text{abv}}{=} \textsf{new}\,\{m\}\ (\{m/z\}\,E \mid \{m/a\}\,F)$. Esboce o grafo de transições de $R \frown R$.

Exercício I.23

Considere a seguinte especificação informal de um controlador C para o sistema de pressurização de um submarino:

> *A pressão do ar no interior de um submarino tem de ser criteriosamente controlada. Para isso existem n sensores que enviam regularmente a pressão medida ao controlador que calcula a sua média e a compara com o valor de referência previamente fixado pelo utilizador. O objectivo do controlador é manter a pressão média a bordo numa vizinhança absoluta de 1 atmosfera do valor de referência. Para isso pode enviar um sinal para activar o compressor ou para o desligar. O controlador é também sinalizado pelo compressor na ocorrência de um erro grave de funcionamento. Nessas circunstâncias o controlador deve desligar o sistema de compressão e acender um indicador luminoso num painel de controlo. Para voltar a funcionar é necessário premir um botão de 'reset'.*

1. Especifique este controlador na linguagem de processos que estudou, não se esquecendo de descrever claramente o significado associado a cada uma das acções que considerar.
2. Suponha, agora, que de forma a garantir que o controlador opera sem interrupção, está prevista a existência de uma sua réplica que entra em funcionamento sempre que, por alguma razão, o controlador em serviço pára. Antes de parar, o controlador executa uma rotina de erro onde activa a réplica e a coloca em comunicação com os sensores. Especifique num dos cálculos de processos que estudou este refinamento do problema original.

Exercício I.24

Considere a construção $[P \leftarrow M \rightarrow Q]$ definida por abreviatura como

$$[P \leftarrow M \rightarrow Q] \stackrel{\text{abv}}{=} \textsf{new}\,\{t_1, t_2, p_1, p_2, a\}\ (\{f_1\}P \mid M \mid \{f_2\}Q)$$

onde se assume, para $i \in \{1, 2\}$, $f_i = \{t_i/t, p_i/p, a/b\}$.

Considere, agora, o seguinte processo cujo domínio de valores se restringe aos números inteiros:

$$
\begin{aligned}
D &\triangleq (p(x).[D \leftarrow C_x \rightarrow D]) + t.\overline{b}.D \\
C_x &\triangleq p(y).(\ \text{if}\ \ x > y\ \ \text{then}\ \ \overline{p}_1\langle y\rangle.C_x\ \ \text{else}\ \ \overline{p}_2\langle y\rangle.C_x) \\
&\quad + \\
&\quad t.\overline{t}_1.a.\overline{d}\langle x\rangle.\overline{t}_2.a.\overline{b}.C_x
\end{aligned}
$$

1. Descreva de forma clara e sucinta o objectivo do processo D.
2. Suponha que o primeiro valor recebido na porta p é um 5. Desenhe o diagrama de sincronização resultante.
3. Suponha, agora, que, de seguida, é recebido um 3. Mostre como o processo evolui e esboce, de novo, o diagrama de sincronização resultante.

Exercício I.25

Um *router* é uma componente fundamental em sistemas computadorizados de controlo assim como na implementação de redes de comunicação. Considere a seguinte especificação informal de uma versão simples deste tipo de componentes:

> *Um* router R *é um dispositivo com* n *portas de entrada e* m *portas de saída e uma porta* c *usada para controlo. Na porta* c *recebe um par de inteiros* (i, j)*, com* $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq m$*. A partir desse momento o* router *vai repetidamente ler mensagens na porta de entrada numerada por* i *e disponibiliza-las na porta de saída numerada por* j*. O dispositivo apenas tem capacidade para armazenar uma mensagem em cada momento. No entanto, a qualquer altura, pode receber em* c *um novo par de inteiros indicando um novo esquema de comutação.*

A descrição acima sofre de algumas ambiguidades. Suponha, por exemplo, que o processo está a operar normalmente comutando entre as portas i e j. Que sucede quando chega a c uma nova mensagem de controlo (k, l) após o processo ter realizado uma leitura em i? Deverá escrevê-la em j ou em l?

Especifique na linguagem de processos que estudou duas versões deste dispositivo que resolvam esta ambiguidade de dois modos *distintos*.

Exercício I.26

Considere a seguinte especificação informal de um controlador C para um sistema de aquecimento central de um edifício:

> *Sensores de temperatura em cada um dos três andares do edifício enviam regularmente a temperatura medida ao controlador que calcula a sua média e a compara com a temperatura de referência fixada previamente pelo utilizador. O controlador tenta manter a temperatura média do edifício numa vizinhança absoluta de 2 graus da temperatura de referência. Para isso pode enviar um sinal para activar a caldeira do aquecimento ou para a desligar. O controlador é também sinalizado pela caldeira da existência de um erro grave de funcionamento. Nessas circunstâncias o controlador deve desligar o sistema de aquecimento e acender um indicador luminoso num painel de controlo. Para voltar a funcionar é necessário um 'reset' manual.*

Especifique este controlador na linguagem de processos que estudou, não se esquecendo de descrever claramente o significado associado a cada uma das acções que considerar.

Exercício I.27

Considere a seguinte descrição dos requisitos de um sistema de comutação de mensagens e proponha uma sua especificação no cálculo de processos que estudou.

> *O sistema é composto por um conjunto de processos emissores S_i, para $i = 1, 2, ..., m$, e outro de processos receptores R_j, para $j = 1, 2, ..., n$, que são controlados por um comutador que ciclicamente estabelece conexões ponto-a-ponto (*i.e.*, entre em cada conexão apenas intervém um processo emissor e outro receptor) entre eles. Em cada momento o número máximo de conexões admissíveis simultaneamente é K. Sempre que uma conexão se estabelece entre, por exemplo, os processos S_i e R_j, S_i envia um sinal α_i que é recebido por R_j. Em seguida, R_j envia ao comutador um sinal de confirmação γ_j e a conexão é terminada.*

3 Cálculo de Processos

Exercício I.28

Indique quais das seguintes relações em $\mathbb{P}$ são bissimulações estritas.

$$S_1 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$
$$S_2 = \emptyset$$
$$S_3 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$
$$S_4 = \{(a.\mathbf{0}, a.\mathbf{0})\}$$
$$S_5 = \{(a.\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, a.b.\mathbf{0} + b.a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid b.\mathbf{0}, b.\mathbf{0}), (a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, a.\mathbf{0}), (\mathbf{0} \mid \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

Exercício I.29

Sejam $X \triangleq receive.send.X$ e $Y \triangleq send.receive.Y$. Mostre que $\{(send.X, Y), (X, receive.Y)\}$ é uma bissimulação estrita. Poderá concluir que $X \sim Y$?

Exercício I.30

Indique quais dos seguintes processos são estritamente equivalentes a $a.b.\mathbf{0}$ (realize as provas e forneça os contra-exemplos necessários para justificar as suas conclusões.

1. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0})$
2. $a.b.\mathbf{0} + a.b.\mathbf{0}$
3. $a.\tau.b.\mathbf{0}$
4. $a.b.\mathbf{0} + a.\mathbf{0}$
5. $a.(b.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}) + a.b.\mathbf{0}$
6. $a.b.\mathbf{0} + \mathbf{0}$
7. $a.\mathbf{0} \mid \mathbf{0}$
8. new $\{c\}$ $a.(b.\mathbf{0} \mid c.\mathbf{0})$

9. $\mathsf{new}\,\{c,d\}\ a.b.(c.\mathbf{0} \mid d.\mathbf{0})$

Exercício I.31

Mostre que se S é uma bissimulação (estrita) a menos de $\equiv$, então $\equiv \cdot S \cdot \equiv$ constitui uma bissimulação (estrita).

Exercício I.32

Suponha que alguém adicionou à linguagem de processos $\mathbb{P}$ dois outros operadores de composição paralela definidos pelas regras seguintes:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E' \otimes F \xleftarrow{a} E \otimes F}\,(O_1) \qquad \frac{F' \xleftarrow{a} F}{E \otimes F' \xleftarrow{a} E \otimes F}\,(O_2)$$

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E \quad \wedge \quad \overline{a} \notin \mathsf{fn}(F)}{E' \parallel F \xleftarrow{a} E \parallel F}\,(P_1) \qquad \frac{F' \xleftarrow{a} F \quad \wedge \quad \overline{a} \notin \mathsf{fn}(E)}{E \parallel F' \xleftarrow{a} E \parallel F}\,(P_2)$$

$$\frac{E \xleftarrow{a} E' \quad F \xleftarrow{\overline{a}} F'}{E' \parallel F' \xleftarrow{\tau} E \parallel F}\,(P_3)$$

1. Explique informalmente o propósito de $\otimes$ e $\parallel$, distinguindo-os da composição paralela que estudou.
2. A partir destas regras explique de que forma os diagramas de sincronização de $E \otimes F$ e $E \parallel F$ podem ser construidos a partir dos diagramas de E e de F. Compare esse processo com o que se passa com a construção do diagrama de sincronização de $E \mid F$.
3. Mostre ou refute a associatividade de $\parallel$ relativamente a $\sim$.

Exercício I.33

Determine um processo P tal que $P \mid (a.b.\mathbf{0}) \sim a.b.a.\mathbf{0} + a.a.b.\mathbf{0}$, ou mostre que um tal P não pode existir.

Exercício I.34

Considere o processo $A \triangleq a.(A \mid b.\mathbf{0})$.

1. Calcule o conjunto de derivações de A.
2. Prove que $A \mid A \sim A$.

Exercício I.35

Para os seguintes pares de processos indique, justificando, os que podem ser relacionados por $\approx$. E por $=$?

1. $a.\tau.b.\mathbf{0}$ e $a.b.\mathbf{0}$

2. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$
3. $a.(b.\mathbf{0} + \tau.c.\mathbf{0})$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0}) + a.c.\mathbf{0}$
4. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
5. $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0} + b.\mathbf{0}$
6. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0}))) + a.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})$
7. $a.(b.\mathbf{0} + (\tau.(c.\mathbf{0} + \tau.d.\mathbf{0})))$ e $a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.(c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) + a.d.\mathbf{0}$
8. $\tau.(a.b.\mathbf{0} + a.c.\mathbf{0})$ e $\tau.a.b.\mathbf{0} + \tau.a.c.\mathbf{0}$
9. $\tau.(a.\tau.b.\mathbf{0} + a.b.\tau.\mathbf{0})$ e $a.b.\mathbf{0}$
10. $\tau.(\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0})$ e $\tau.a.\mathbf{0} + \tau.b.\mathbf{0}$
11. $A \triangleq a.\tau.A$ e $B \triangleq a.B$
12. $A \triangleq \tau.A + a.\mathbf{0}$ e $a.\mathbf{0}$
13. $A \triangleq \tau.A$ e $\mathbf{0}$

Exercício I.36

Suponha que os processos R e T têm, entre outras, as transições seguintes: $R \xleftarrow{\tau} T$ e $T \xleftarrow{\tau} R$. Mostre que, nessa condições, se tem $R = T$.

Exercício I.37

Considere a definição seguinte de um *activador de n portas*:

$$
\begin{aligned}
AC_0 &\triangleq \overline{s}.\mathbf{0} \\
AC_n &\triangleq a.AC_{n-1}
\end{aligned}
$$

1. Explique o comportamento deste processo.
2. Defina um activador de 4 portas usando apenas cópias do processo AC_2 e os operadores estáticos da linguagem.
3. Poderá o processo que definiu pode ser considerado observacionalmente equivalente a AC_4?

Exercício I.38

Considere os factos seguintes acerca de uma relação binária S sobre $\mathbb{P}$. Para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que S constitui uma bissimulação observacional:

1. S é a relação identidade em $\mathbb{P}$.
2. S é um subconjunto da relação identidade em $\mathbb{P}$.
3. S é uma bissimulação estrita a menos de $\equiv$.
4. S é a relação vazia.
5. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\}$.
6. $S = \{(a.E, a.F) \mid E \approx F\} \cup \approx$.

Exercício I.39

Mostre que

1. $E + \tau.(E + F) \ = \ \tau.(E + F)$
2. $a.(E + \tau.\tau.E) \ = \ a.E$
3. $\tau.(G + a.(E + \tau.F)) \ = \ \tau.(G + a.(E + \tau.F)) + a.F$

Exercício I.40

Considere a equação $X \ = \ a.\mathbf{0} + \tau.X$. Mostre que qualquer processo da forma $\tau.(\tau.P + a.\mathbf{0})$ é solução da equação.

Exercício I.41

Considere a equação $X \ = \ \mathsf{new}\,\{a\}\ (a.X \mid \overline{a}.\mathbf{0})$, onde a variável X ocorre guardada, mas não sequencial, no lado direito. Mostre que o processo $\tau.P$ é solução desta equação, para qualquer P desde que $a, \overline{a} \notin \mathsf{fn}(P)$.

Exercício I.42

Para todo o processo E tal que $\mathsf{fn}(E) = \emptyset$, prove ou refute as seguintes afirmações:

1. $E \mid Q \approx Q$.
2. $E \mid Q = Q$.
3. $E \mid Q = \tau.Q$.

Exercício I.43

Seja $E \triangleq a(x).\overline{a}\langle x\rangle.E$, *i.e.*, E é um *buffer* de uma posição que utiliza a mesma porta para entrada e saída de valores. Assuma que esses valores são números inteiros.

1. Defina um processo sequencial (*i.e.*, sem recurso à composição paralela) F tal que $F \approx E \mid E$.
2. Prove essa equivalência construindo uma bissimulação fraca relacionando os dois processos.
3. Será a sua proposta para F é minimal (no sentido de não conter acções não observáveis desnecessárias)?

Exercício I.44

Recorde as definições de equivalência entre processos que estudou.

1. A partir de definição de $\approx$, mostre que se o processo A fôr definido como $\tau.A + B$ então $A \approx B$.
2. Dê um exemplo de processos X e Y não observacionalmente equivalentes, mas que verificam $X = \tau.X + Y$.
3. Seja $X \triangleq x.X + y.\mathbf{0}$ e $Y \triangleq \overline{x}.Y$. Mostre que $y.\mathbf{0} \ \approx \ \mathsf{new}\,\{x\}\ (X \mid Y)$.

Exercício I.45

Seja P uma expressão na linguagem de processos contendo apenas uma variável livre X e considere as seguintes equações em X:

$$\begin{aligned} X \ &= \tau.(P + \mathsf{new}\,\{a\}\ (a.P \mid \overline{a}.\mathbf{0})) \\ X \ &= \tau.P \end{aligned}$$

Suponha ainda que alguém formulou a seguinte conjectura sobre estas equações:

Se $a \notin \cdots$, $\overline{a} \notin \cdots$ e $\cdots$ ocorrer guardada e sequencial em $\cdots$, as duas equações têm exactamente a mesma solução e esta é única (i.e., *todas as possiveis soluções são observacionalmente congruentes)*

1. Preencha as reticências na conjectura acima de modo a obter uma afirmação válida.
2. Prove a conjectura por raciocínio equacional.

Exercício I.46

Considere os factos seguintes e, para cada um deles, indique, justificando, se é ou não possível concluir que $E = F$:

1. $E \approx F$ e E é um processo estável.
2. $E \approx F$ e nem E nem F são processos estáveis.
3. Existe um G tal que $E \mid G = F \mid G$.
4. $a.E = a.F$.
5. E e F satisfazem a mesma equação $X \sim E(X)$, onde as ocorrências de X em E são todas guardadas e sequenciais.

Exercício I.47

Apesar de os sistemas concorrentes lidarem geralmente com processos perpétuos, em determinados casos é necessário considerar igualmente processos que realizam todas as suas tarefas e terminam com sucesso. Considere uma classe T de processos ditos *termináveis* que para indicar o termo da sua execução realizam uma acção observável especial †, após o que evoluem necessariamente para **0**.

Na classe T é possível definir um operador de composição *sequencial*, que representamos por $P \,;\, Q$, cujo significado intuitivo é: *após P terminar o processo composto comporta-se como Q*. Formalmente,

$$P \,;\, Q \;\triangleq\; \mathsf{new}\,(\{m/\dagger\}\, P \mid \overline{m} \cdot Q)\; m$$

sendo m um identificador de acção que não ocorre nem em P nem em Q.

1. Defina um processo $U \in T$ tal que $U \,;\, P \approx P$. Justifique a sua definição.
2. Mostre ou refute que, para $P, Q, R \in T$, se tem
$$(P + Q) \,;\, R \;\approx\; (P \,;\, R) + (Q \,;\, R)$$
3. Sendo a composição sequencial em T um caso particular da composição paralela, a lei anterior poderia parecer um caso particular da igualdade
$$(P + Q) \mid R \;\approx\; (P \mid R) + (Q \mid R)$$
No entanto esta igualdade é, em geral, falsa. Comprove esta afirmação fornecendo um contra-exemplo adequado.

Exercício I.48

Considere a seguinte especificação, na linguagem de processos que estudou, da noção de *pipe* suportada no sistema UNIX:

$$U \rhd V \;\stackrel{\text{abv}}{=}\; \mathsf{new}\,\{c\}\; (\{c/out\}U \mid \{c/in\}V)$$

assumindo que, em ambos os processos, as acções $\overline{out}$ e in representam, respectivamente, as portas de saída e entrada.

1. Considere, agora, os seguintes processos, só parcialmente definidos:
$$U_1 \triangleq \overline{out}.T$$
$$V_1 \triangleq in.R$$
$$U_2 \triangleq \overline{out}.\overline{out}.\overline{out}.T$$
$$V_2 \triangleq in.in.in.R$$
Prove, indicando sempre as leis que utilizou, ou refute as seguintes proposições:
   (a) $U_1 \rhd V_1 \;\sim\; T \rhd R$

(b) $U_2 \rhd V_2 \;=\; U_1 \rhd V_1$

2. Mostre ou refute a associatividade do operador $\rhd$ relativamente à igualdade entre processos, *i.e.*, para todo o $P, T, V \in \mathbb{P}$,
$$(U \rhd V) \rhd T \;=\; U \rhd (V \rhd T)$$
3. Mostre que $\mathbf{0} \rhd \mathbf{0} \;=\; \mathbf{0}$.

Exercício I.49

Seja R uma bissimulação (observacional). Diga, justificando sucintamente, quais das afirmações seguintes pode concluir desse facto:

1. Se $(E, F) \in R$ então $E \approx F$.
2. Se $E \approx F$ então $(E, F) \in R$.
3. R é uma relação transitiva.
4. A composição de R consigo própria forma uma bissimulação estrita.

Exercício I.50

Considere um operador $\circlearrowleft_n$ cuja semântica operacional é dada pela regra seguinte:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E' \xleftarrow{a} \circlearrowleft_0 E} \qquad \frac{E' \xleftarrow{a} E}{\circlearrowleft_{n-1} E' \xleftarrow{a} \circlearrowleft_n E} \quad \text{para } n > 0$$

1. Indique sucintamente o seu propósito.
2. Discuta para que valores de m e n se poderá ter $\circlearrowleft_n (\circlearrowleft_m E) \sim \circlearrowleft_n E$.
3. Mostre que $E \sim F$ implica $\circlearrowleft_n E \sim \circlearrowleft_n F$.
4. Mostre, recorrendo a um contra exemplo, que a implicação da alínea anterior deixa de verificar-se se se substituir $\sim$ por $\approx$.
5. Como modificaria a semântica operacional deste novo operador para que a implicação referida se verificasse, *i.e.*, $E \approx F \;\Rightarrow\; \circlearrowleft_n E \approx \circlearrowleft_n F$?

Exercício I.51

Considere o operador seguinte definido operacionalmente pela regra

$$\frac{E' \xleftarrow{x} E}{E' \xleftarrow{x} E \setminus\!\setminus_a} \text{ se } \; x \neq a, x \neq \overline{a}$$

1. Indique sucinta mas claramente o seu propósito.
2. Prove, por construção de uma bissimulação, que se $P \sim Q$ então $P \setminus\!\setminus_a \sim Q \setminus\!\setminus_a$.
3. Defina dois processos E e F tais que $E \approx F$ mas $E \setminus\!\setminus_a \not\approx F \setminus\!\setminus_a$.
4. Recorrendo à definição de igualdade de processos, mostre ou refute que se $P = Q$ então $P \setminus\!\setminus_a = Q \setminus\!\setminus_a$.

Exercício I.52

Considere um novo operador entre processos, dito *duplicador de acções*, e definido pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{E' \xleftarrow{a} E}{E \xleftarrow{a} \circlearrowleft(E)}$$

Note que a derivada que surge na conclusão da regra é E e não E'. Por exemplo, $a.\mathbf{0} \xleftarrow{a} \circlearrowleft(a.\mathbf{0})$. Prove ou refute que:

1. $E \sim F$ implica $\circlearrowleft(E) \sim \circlearrowleft(F)$.
2. $E \approx F$ implica $\circlearrowleft(E) \approx \circlearrowleft(F)$.
3. $\circlearrowleft(E + F) \sim \circlearrowleft(E) + \circlearrowleft(F)$.

4 Lógicas para Processos

Exercício I.53

Formule cada uma das seguintes propriedades na lógica modal $\mathcal{M}$. Repare que algumas são propositadamente vagas e podem, portanto, ser formalizadas de diversos modos.

1. A ocorrência de um a e um b é impossível.
2. A ocorrência de um a seguido de um b é impossível.
3. Apenas a ocorrência de a é possível.
4. Após a ocorrência de a é possível a ocorrência de b ou c.
5. Após a ocorrência de a ou b é possível a ocorrência de c.
6. Se a ocorrer, é possível a ocorrência de b ou c, mas não de ambos.
7. a não pode ocorrer antes de b.
8. Existe apenas uma transição etiquetada por a.

Exercício I.54

Considere os processos seguintes e indique, para cada um deles, quais das propiedades acima são verificadas:

1. $E_1 \triangleq a.b.\mathbf{0}$
2. $E_2 \triangleq a.c.\mathbf{0}$
3. $E \triangleq E_1 + E_2$
4. $F \triangleq a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$
5. $G \triangleq E + F$

Exercício I.55

Considere a seguinte especificação de um dispositivo de corte de madeira.

$$\begin{aligned} Start &\triangleq fw.Go + stop.\mathbf{0} \\ Go &\triangleq fw.bk.bk.Start + right.left.bk.Start \end{aligned}$$

Escreva em $\mathcal{M}$ as seguintes propriedades:

1. Após fw outro fw é imediatamente possível.
2. Após um fw seguido de um $right$, $left$ é possível e bk não.
3. A acção fw é, inicialmente, a única possível.
4. A terceira acção de $Start$ é distinta de fw.

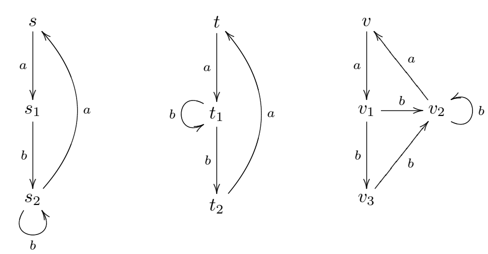
Exercício I.56

Determine um sistema de transição etiquetado cujo estado inicial satisfaça simultaneamente as seguintes propriedades modais:

- $\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle \text{true} \wedge \langle c \rangle \text{true}$
- $\langle a \rangle \langle b \rangle ([a] \text{false} \wedge [c] \text{false} \wedge [b] \text{false})$
- $\langle a \rangle \langle b \rangle (\langle a \rangle \text{true} \wedge [c] \text{false})$

Exercício I.57

Considere os seguintes sistemas de transição etiquetados por acções em Act.



Mostre que os estados s, t e v não são bissimilares e determine fórmulas modais que os distingam dois a dois.

Exercício I.58

Seja E um processo. Uma fórmula ϕ diz-se a *fórmula característica* de E sse

$$\forall_{F \in \mathbb{P}} \,.\, F \models \phi \;\; sse \;\; F \sim E$$

Repare que, por definição, um processo verifica a *fórmula característica* de E sse fôr estritamente equivalente a E. Determine a *fórmula característica* do processo $x.\mathbf{0}$.

Exercício I.59

Considere os processos $E \triangleq a.(b.\mathbf{0} + c.\mathbf{0})$ e $F \triangleq a.b.\mathbf{0} + a.c.\mathbf{0}$. Escreva uma fórmula ϕ em $\mathcal{M}$ que seja válida em E mas não em F.

Exercício I.60

Considere os processos seguintes e escreva uma fórmula em $\mathcal{M}$ que seja válida para o proceso R e falsa para S.

$$E \triangleq b.c.\mathbf{0} + b.d.\mathbf{0} \tag{1}$$
$$F \triangleq E + b.(c.\mathbf{0} + d.\mathbf{0}) \tag{2}$$
$$R \triangleq a.E + a.F \tag{3}$$
$$S \triangleq a.F \tag{4}$$

Exercício I.61

Defina em $\mathcal{M}$, por abreviatura, um operador (K), com $K \subseteq Act$, de forma que $E \models (K)\phi$ sse as acções em K forem as acções iniciais de E, todas elas conduzindo a estados que validam ϕ.

Exercício I.62

Como sabe, a composição paralela não é, no caso geral, idempotente.

1. Fazendo $E \triangleq a.b.E$, formule uma propriedade em $\mathcal{M}$ que distinga E de $E \mid E$.
2. Em certos casos, porém, a idempotência verifica-se. Construa uma bissimulação que demonstre a equivalência $E \sim E \mid E$ quando E é da forma $E \triangleq \sum_{x \in K} x.E$, para um qualquer $K \subseteq Act - \{\tau\}$. Será a conclusão anterior válida para todo o $K \subseteq Act$?

Exercício I.63

Determine

1. $\| [a]\, [b]\, \langle c, d \rangle\, \mathsf{true} \|$
2. $\| \langle a \rangle\, \langle - \rangle\, \mathsf{true} \|$
3. $\| [a]\, \langle - \rangle\, \mathsf{true} \wedge [b]\, [-]\, \mathsf{false} \|$
4. $\| [a]\, \langle - \rangle\, \mathsf{true} \vee [b]\, [-]\, \mathsf{false} \|$