Lógica Proposicional

Lógica Computacional

Carlos Bacelar Almeida

Departmento de Informática
Universidade do Minho

2007/2008

Sintaxe

Definição

O conjunto das fórmulas da lógica proposicional é definido pela gramática

$$\mathcal{L} ::= \mathcal{P} | (\neg \mathcal{L}) | (\mathcal{L} \vee \mathcal{L}) | (\mathcal{L} \wedge \mathcal{L})) | (\mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L})$$

onde $\mathcal{P}$ é um conjunto infinito e contável de símbolos de proposições.

- Para denotar proposições utilizaremos letras minúsculas ($p, q, \ldots$).
- Regras de precedência e associatividade permitem omitir parênteses redundantes (e.g. $\neg p \wedge q \Rightarrow \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \Rightarrow q \vee p$).
- Também é normal incluir-se na sintaxe a fórmula $\perp$ (Absurdo). Na sua ausência pode ser definida como $p \wedge \neg p$ (sendo p um qualquer símbolo proposicional).

Semântica

- Um modelo $\mathcal{M}$ da lógica proposicional é um sub-conjunto do conjunto de proposições $\mathcal{P}$.

Definição

A validade de fórmulas proposicionais num modelo é definida indutivamente por:

- $\mathcal{M} \models p \quad sse \quad p \in \mathcal{M}$
- $\mathcal{M} \models \neg P \quad sse \quad \mathcal{M} \not\models P$
- $\mathcal{M} \models P \vee Q \quad sse \quad \mathcal{M} \models P \quad ou \quad \mathcal{M} \models Q$
- $\mathcal{M} \models P \wedge Q \quad sse \quad \mathcal{M} \models P \quad e \quad \mathcal{M} \models Q$
- $\mathcal{M} \models P \Rightarrow Q \quad sse \quad \mathcal{M} \not\models P \quad ou \quad \mathcal{M} \models Q$

- Uma fórmula P diz-se **refutável** se existir um modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \not\models P$.
- Uma fórmula válida em qualquer modelo diz-se uma **tautologia**.

O Absurdo

- É normal incluir-se na sintaxe da lógica proposicional a constante $\perp$ — o **absurdo** (ou falso).
- Quando existe essa constante, a sua semântica num modelo $\mathcal{M}$ é definida por
$$\mathcal{M} \not\models \perp.$$
- Na linguagem adoptada neste curso, podemos considerar $\perp$ uma abreviatura de $\varphi \wedge \neg\varphi$ (para uma qualquer fórmula φ).
- De facto, facilmente se verifica que, qualquer que seja a escolha de φ e modelo $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Teorias

- A um conjunto de fórmulas dá-se o nome de **teoria**. Para denotar teorias utilizaremos letras gregas maiúsculas ($\Gamma, \Delta, \ldots$)
- A noção de validade é generalizada para teorias da forma óbvia: $\mathcal{M} \models \Gamma$ sse $\mathcal{M} \models p$ para todo $p \in \Gamma$.
- Uma teoria Γ **inconsistente** quando nenhum modelo a valida (i.e. para qualquer modelo $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \not\models \Gamma$).

Consequência Semântica

Interessa caracterizar a noção de "consequência lógica" onde a validade de uma fórmula pode ser vista como uma *consequência* da validade de outras.

Definição

*Seja P uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. P diz-se **consequência semântica** de Γ (escreve-se $\Gamma \models p$) se, para qualquer modelo $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \Gamma$ determinar que $\mathcal{M} \models P$.*

- Exemplos:
  - $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$
  - $\{p, p \Rightarrow q \Rightarrow r\} \not\models r$
  - $\{p, q, p \Rightarrow q \Rightarrow r\} \models r$
- As tautologias são consequência semântica da teoria vazia.
- Uma teoria Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \bot$.

Sistemas Dedutivos

- A caracterização de "consequência lógica" por via semântica não é completamente satisfatória: o seu juízo envolve uma quantificação universal sobre os modelos.
- Interessava caracterizar essa noção ao nível "simbólico" por intermédio de um *sistema formal* — as "frases" desse sistema dizem-se **deduções** (ou *provas*).
- Introduz-se assim a **relação de dedução** ($\vdash$). Tal como na consequência semântica, é útil generalizar a noção de dedução para admitir um conjunto de premissas (**hipóteses**) — assim $\Gamma \vdash P$ denota a asserção que é possível deduzir P partindo da hipóteses contidas em Γ.

Em termos abstractos, relações de dedução caracterizam-se por:

Definição

*Uma **relação de dedução** ($\vdash$) é uma relação binária entre teorias e fórmulas que verifica as seguintes propriedades:*

- *Inclusão: Se $P \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash P$.*
- *Monotonia: Se $\Delta \vdash P$ e $\Delta \subseteq \Gamma$ então $\Gamma \vdash P$.*
- *Corte: Se $\Delta \vdash H$ e $\Gamma \cup \{H\} \vdash P$ então $\Delta \cup \Gamma \vdash P$.*

- Quando é possível estabelecer a asserção $\vdash P$ (i.e. $\emptyset \vdash P$) dizemos que P é um **teorema**.
- Naturalmente que é necessário estabelecer a correspondência entre o mundo semântico e o simbólico (i.e. pretende-se que o conjunto das tautologias e dos teoremas sejam iguais).

Consequência Semântica como Relação de Dedução

- Podemos observar que a relação de consequência semântica definida atrás satisfaz os requisitos de uma relação de dedução abstracta.

Teorema

A relação de consequência semântica ($\models$) é uma relação de dedução.

Demonstração.

Necessitamos de demonstrar as propriedades (1) *inclusão*; (2) *monotonia* e (3) *corte*.

(*exercício resolvido na aula Teórico-Prática*)

$\square$

Dedução Natural

A relação $\vdash^{\mathcal{ND}}$ é definida à custa de árvores construídas com base em regras de inferência.

- Regras de Introdução:

$$(\mathrm{I}\wedge)\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}\qquad (\mathrm{I}\vee_1)\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{A\vee B}\qquad (\mathrm{I}\vee_2)\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A\vee B}$$

$$(I\Rightarrow)\ \frac{\begin{matrix}[A]_i\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\to B}\ i\qquad (\mathrm{I}\neg)\ \frac{\begin{matrix}[A]_i\\ \vdots\\ B\wedge\neg B\end{matrix}}{\neg A}\ i\qquad (\mathrm{I}\neg\neg)\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\neg\neg A}$$

Dedução Natural

- Regras de Eliminação:

$$(\mathrm{E}\ \wedge_1)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\wedge B\end{array}}{A} \qquad (\mathrm{E}\ \wedge_1)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\wedge B\end{array}}{B} \qquad (\mathrm{E}\ \vee)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]_i\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]_i\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ i$$

$$(\mathrm{E} \Rightarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ A\Rightarrow B\end{array}}{B} \qquad (\mathrm{E}\ \neg)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg A\end{array}}{B} \qquad (\mathrm{E}\ \neg\neg)\ \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$$

- A asserção $\Gamma \vdash^{\mathcal{ND}} P$ é estabelecida por uma árvore cuja raiz é P e as folhas não fechadas são fórmulas contidas em Γ.

Exemplo de Dedução

$$(\mathrm{E}\ \neg\neg)\ \dfrac{(\mathrm{I}\ \neg)\ \dfrac{(\mathrm{E}\ \neg)\ \dfrac{(\mathrm{E}\ \neg\neg)\ \dfrac{(\mathrm{I}\ \neg)\ \dfrac{(\mathrm{E}\ \neg)\ \dfrac{[\neg(P\vee\neg P)]_3 \quad (\mathrm{I}\ \vee_2)\ \dfrac{[\neg P]_1}{P\vee\neg P}}{\bot}}{\neg\neg P}\ 1}{P} \quad (\mathrm{I}\ \neg)\ \dfrac{(\mathrm{E}\ \neg)\ \dfrac{[\neg(P\vee\neg P)]_3 \quad (\mathrm{I}\ \vee_1)\ \dfrac{[P]_2}{P\vee\neg P}}{\bot}}{\neg P}\ 2}{\bot}}{\neg\neg(P\vee\neg P)}\ 3}{P\vee\neg P}$$

Temos então

$$\emptyset \vdash^{\mathcal{ND}} (P\vee\neg P)$$

Dedução Natural (formulação com sequentes)

- É conveniente explicitar o conjunto de proposições “abertas” num dado ponto da derivação.
- Este argumento é tanto mais relevante quando se procura *construir* a derivação “por retrocesso” (problema abordado adiante).
- Somos levados a considerar **sequentes** da forma $\Gamma \vdash P$ onde Γ é um conjunto de fórmulas abertas na derivação de P (designamos Γ por **contexto**).
- Folhas da árvore são sempre da forma **Axioma**:

$$(\mathrm{Ax})\ \frac{}{\Gamma, P \vdash P}$$

Dedução Natural (formulação com sequentes)

- Regras de Introdução:

$$(\mathrm{I}\ \wedge)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (\mathrm{I}\ \vee_1)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (\mathrm{I}\ \vee_2)\ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$(I \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad (\mathrm{I}\ \neg)\ \frac{\Gamma, A \vdash B \wedge \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad (\mathrm{I}\ \neg\neg)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}$$

- Regras de Eliminação:

$$(\mathrm{E}\ \wedge_1)\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (\mathrm{E}\ \wedge_1)\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad (\mathrm{E}\ \vee)\ \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$(\mathrm{E} \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \qquad (\mathrm{E}\ \neg)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \qquad (\mathrm{E}\ \neg\neg)\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Exemplo de Dedução

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash \neg P$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash P \vee \neg P$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), \neg P \vdash \bot$}
\LeftLabel{(I $\neg$)}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg\neg P$}
\LeftLabel{(E $\neg\neg$)}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash P$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P \vee$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \bot$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg P$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \bot$}
\LeftLabel{(I $\neg$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg\neg(P \vee \neg P)$}
\LeftLabel{(E $\neg\neg$)}
\UnaryInfC{$\vdash P \vee \neg P$}
\end{prooftree}
$$

(mesmo incompleta dá para perceber a mensagem...)

Correcção e Completude

- Existem garantias que os *teoremas* demonstrados pelo sistema dedutivo sejam *tautologias* da lógica proposicional?
- E será possível encontrar uma demonstração para todas as *tautologias*?

Teorema (Correcção)

Se $\Gamma \vdash^{\mathcal{ND}} P$ *então* $\Gamma \models P$.

Teorema (Completude)

Se $\Gamma \models P$ *então* $\Gamma \vdash^{\mathcal{ND}} P$.

Demonstração.

Demonstração apresentada na teórica. □

Construção de derivações

- A existência de um sistema dedutivo correcto e completo permite-nos aferir a validade de fórmulas por *construção da derivação* respectiva.
- Mas nada nos dá a garantia que **seja fácil** encontrar essa derivação...
- O que se pretende é **um procedimento** que permita a construção da derivação (se for possível, naturalmente).
- Em rigor, e em termos genéricos, não temos sequer garantias que esse procedimento exista...
- Pragmaticamente, a estratégia de construir a derivação **por retrocesso** é sensata: parte-se da asserção que se pretende verificar como conclusão da derivação, e procura-se completar a árvore por forma a que todas as folhas sejam axiomas.

Exemplo

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\overline{\Gamma \vdash A} \quad \overline{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}}{\Gamma \vdash B}\,(\mathrm{E} \Rightarrow)
      \quad
      \dfrac{\overline{\Gamma \vdash A} \quad \overline{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C}}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\,(\mathrm{E} \Rightarrow)
    }{\color{red}{\Gamma =} A \Rightarrow B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,(\mathrm{E} \Rightarrow)
  }{A \Rightarrow B \Rightarrow C, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C}\,(\mathrm{I} \Rightarrow)
}{
  \dfrac{A \Rightarrow B \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}{\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}\,(\mathrm{I} \Rightarrow)
}\,(\mathrm{I} \Rightarrow)
$$

Dificuldades

- Certos passos são completamente determinísticos: a estrutura da fórmula determina qual a regra a aplicar (e.g. I $\Rightarrow$).
- Outros passos envolvem "descobrir" fórmulas que permitam aplicar as regras apropriadas (e.g. E $\Rightarrow$).
- Tecnicamente, podemos identificar as dificuldades com o facto de certas regras incluírem nas permissas (sub-)fórmulas que não estão presentes na conclusão.

$$(I \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \qquad (\mathrm{E} \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

- A busca de um sistema de dedução com a **propriedade de sub-fórmula** levou *Gerhard Gentzen* a propor o "Cálculo de Sequentes".

Cálculo de Sequentes

- Adopta sequentes com a seguinte forma:

$$\Gamma \vdash^{\mathrm{LC}} \Delta$$

  onde Γ e Δ são conjuntos de fórmulas.
- Evitam-se as regras de eliminação. Em vez disso consideram-se regras de introdução à esquerda e à direita de $\vdash^{\mathrm{LC}}$.
- ...com excepção das regras:

$$(\mathrm{Corte})\ \frac{\Gamma, C \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \qquad (\mathrm{Ax})\ \frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

- A interpretação pretendida para os sequentes atribui uma natureza conjuntiva para Γ e disjuntiva para Δ.
- Formalmente dizemos que um modelo $\mathcal{M}$ valida um sequente $\Gamma \vdash^{\mathrm{LC}} \Delta$ quando: "*Para toda fórmula $P \in \Gamma$, $\mathcal{M} \models P$ implica que existe uma fórmula $Q \in \Delta$ tal que $\mathcal{M} \models Q$*"

Cálculo de Sequentes LC

- Regras *à direita*:

$$(\text{D} \wedge)\ \frac{\Gamma \vdash P, \Delta \qquad \Gamma \vdash Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \wedge Q, \Delta} \qquad\qquad (\text{D} \neg)\ \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg P, \Delta}$$

$$(\text{D} \vee)\ \frac{\Gamma \vdash P, Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \vee Q, \Delta} \qquad\qquad (\text{D} \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, P \vdash Q, \Delta}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q, \Delta}$$

- Regras *à esquerda*:

$$(\text{E} \wedge)\ \frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta} \qquad\qquad (\text{E} \neg)\ \frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma, \neg P \vdash \Delta}$$

$$(\text{E} \vee)\ \frac{\Gamma, P \vdash \Delta \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash \Delta} \qquad\qquad (\text{E} \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, Q \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash \Delta}$$

Exemplo de Derivação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A, C}}{B \vdash A, A \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A, C}}{\vdash A, A \Rightarrow C}}{A \Rightarrow B \vdash A, A \Rightarrow C}}{\vdash A, (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C, A \Rightarrow B, A \vdash C}}{C, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C}}{C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B, A \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A, B, C}}{\vdash A, B, A \Rightarrow C}}{A \Rightarrow B \vdash B, A \Rightarrow C}}{\vdash B, (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}}{B \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}}{\dfrac{A \Rightarrow B \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}{\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C}}$$

Cálculo de Sequentes LK: Regras Estruturais

- Historicamente, os sequentes foram definidos considerando sequências de fórmulas (e não conjuntos como fizemos atrás). Nesse sistema (denominado LK) existe a necessidade de se considerar **regras estruturais** que permitem a manipulação dos contextos.
- Regras estruturais em LK:

$$(D\ C)\ \frac{\Gamma \vdash P, P, \Delta}{\Gamma \vdash P, \Delta} \qquad (D\ W)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash P, \Delta} \qquad (D\ P)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, Q, P, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, P, Q, \Delta'}$$

$$(E\ C)\ \frac{\Gamma, P, P \vdash \Delta}{\Gamma, P \vdash \Delta} \qquad (E\ W)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, P \vdash \Delta} \qquad (E\ P)\ \frac{\Gamma, Q, P, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, P, Q, \Gamma' \vdash \Delta}$$

- As regras lógicas assumiam também versões ligeiramente diferentes (e.g. axiomas assumem a forma restrita $A \vdash A$).
- A formulação apresentada é devida a *Kanger* (1957). A sua utilização consideravelmente mais simples do que a do sistema original.

Exemplo de Derivação

As diferenças na utilização das versões LC e LK ficam bem patentes nas seguintes derivações:

- No Sistema LC:

$$(D \vee)\ \cfrac{(D \neg)\ \cfrac{(Ax)\ \cfrac{}{p \vdash p}}{\vdash p, \neg p}}{\vdash p \vee \neg p}$$

- No Sistema LK:

$$(D\ C)\ \cfrac{(D \vee_1)\ \cfrac{(D\ P)\ \cfrac{(D \vee_2)\ \cfrac{(D \neg)\ \cfrac{(Ax)\ \cfrac{}{p \vdash p}}{\vdash \neg p, p}}{\vdash p \vee \neg p, p}}{\vdash p, p \vee \neg p}}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}}{\vdash p \vee \neg p}$$

Correcção e Completude

Teorema

Se $\Gamma \vdash^{\mathrm{LC}} P$ então $\Gamma \models P$.

Demonstração.

Por indução da derivação da asserção $\Gamma \vdash^{\mathrm{LC}} P$.

(Detalhes apresentados na aula teórica) □

Teorema

Se $\Gamma \models P$ então $\Gamma \vdash^{\mathrm{LK}} P$.

Demonstração.

Pelo resultado de completude para $\vdash^{\mathcal{ND}}$, temos que se $\Gamma \models P$ então $\Gamma \vdash^{\mathcal{ND}} P$. Vamos então construir uma derivação em $\vdash^{\mathrm{LC}}$ por indução estrutural na derivação em $\vdash^{\mathcal{ND}}$.

(*Detalhes apresentados na aula teórica*) □

Eliminação do Corte

- A propriedade que destingue o cálculo de sequentes da dedução natural é que todas as regras (com excepção do corte) satisfazem a *propriedade de sub-fórmula*.
- Por outro lado, mostra-se que a omissão da regra do corte não afecta o poder expressivo do sistema de dedução, i.e.

Teorema

Sempre que é possível estabelecer a asserção $\Gamma \vdash^{\mathrm{LC}} \Delta$, também existe uma derivação dessa mesma asserção que não faz uso da regra de corte.

Demonstração.

Intuitivamente, substitui-se as ocorrências da regra de corte por "uma cópia" da derivação da fórmula sobre a qual este é realizado (ou seja, substitui-se os "lemas" pelas provas respectivas).

(*Detalhes apresentados na aula teórica*) □

- Designamos por LC_0 o cálculo de sequentes sem a regra de corte.
- Na perspectiva da *mecanização do processo de prova*, este resultado é fundamental: dado que todas as regras em LC_0 satisfazem a propriedade de sub-fórmula, o processo de construção de derivações não envolve nunca "descobrir" fórmulas apropriadas para prosseguir a derivação (compare com o caso da dedução natural).
- ...o que não quer dizer que não existam "várias formas" de realizar uma dada derivação. De facto, o processo de construção das derivações é notoriamente não determinístico.

Considere-se as seguintes derivações para uma mesma asserção:

$$
\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(E\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{}{A,B,C\vdash C}}{A,C\vdash B\Rightarrow C}}{C\vdash A\Rightarrow B\Rightarrow C} \qquad \scriptstyle(D\wedge)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash A,C}}{A\vdash A,B\Rightarrow C}}{\vdash A,A\Rightarrow B\Rightarrow C} \qquad \scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash B,C}}{A\vdash B,B\Rightarrow C}}{\vdash B,A\Rightarrow B\Rightarrow C}}{\vdash A\wedge B,A\Rightarrow B\Rightarrow C}}{A\wedge B\Rightarrow C\vdash A\Rightarrow B\Rightarrow C}}{\vdash (A\wedge B\Rightarrow C)\Rightarrow A\Rightarrow B\Rightarrow C}
$$

$$
\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(D\Rightarrow)\ \dfrac{\scriptstyle(E\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{}{A,B,C\vdash C} \qquad \scriptstyle(D\wedge)\ \dfrac{\dfrac{}{A,B\vdash A,C} \qquad \dfrac{}{A,B\vdash B,C}}{A,B\vdash A\wedge B,C}}{A,B,A\wedge B\Rightarrow C\vdash C}}{A,A\wedge B\Rightarrow C\vdash B\Rightarrow C}}{A\wedge B\Rightarrow C\vdash A\Rightarrow B\Rightarrow C}}{\vdash (A\wedge B\Rightarrow C)\Rightarrow A\Rightarrow B\Rightarrow C}
$$

- As derivações diferem apenas na ordem pela qual se aplicaram as regras.
- Esta "diversidade" de *provas equivalentes* é por vezes indesejável e pode ser apontada como uma desvantagem em relação à dedução natural (voltaremos a este assunto adiante...).