Elementos Lógicos da Programação I– Módulo IV

Lógica de Primeira Ordem

1. Introdução.
   (a) Sintaxe
   (b) Determinação e substituição.
   (c) Semântica
2. Sistemas de dedução hilbertianos para a LPO.
3. Sistemas de dedução de Gentzen.
4. "*Tableaux*" na LPO.

Introdução

A LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM (LPO) aumenta o poder expressivo da linguagem lógica introduzindo a capacidade de descrever *propriedades* de *objectos* e de relacionar essas propriedades.

Exemplos

(i) Se a quantidade x é *par* então $x+1$ é *ímpar*.

(ii) Se o valor da variável x é *maior do que* 0 então o programa P *termina*.

(iii) Todo o país P tem uma cidade C que *é capital* de P.

Para representar os *objectos* a LPO define entidades sintácticas chamadas **termos**. Para descrever as *propriedades* desses objectos a LPO introduz entidades sintácticas chamadas **predicados**. [a]

Os objectos podem ser *determinados* através de **símbolos constantes** ou através de construções, a partir de outros objectos, por aplicação de **símbolos de funções**.

Os objectos podem ainda ser *indeterminados* e, nesse caso, são descritos por **variáveis**.

Propriedades atómicas são descritas por **símbolos de predicados** aplicados à representação de objectos. Propriedades (atómicas ou não) podem ser combinadas usando **conectivos proposicionais**.

Propriedades que contenham objectos indeterminados são *indeterminadas*. Uma propriedade indeterminada pode-se tornar determinada recorrendo a **quantificadores**.

---

[a] É possível pensar numa linguagem que represente não só propriedades de objectos como também propriedades de transformações de objectos, ou propriedades de propriedades, ou propriedades de transformações de propriedades, etc. Uma tal linguagem já não é "*de 1ª ordem*" e designa-se por **lógica de ordem superior**.

Exemplos

O exemplo (i) do acetato 1; nele correm dois *termos*:

O primeiro representa uma quantidade completamente indeterminada; por isso a forma apropriada é uma *variável* x.

O segundo, $x + 1$, é construído por um *símbolo de função*, $+$, aplicado a x e à quantidade representada pelo símbolo constante 1.

As propriedades *par* e *ímpar* requerem a introdução de dois *símbolos de predicado*, respectivamente par e $\mathsf{ímpar}$. As duas propriedades referidas no exemplo serão então

$$\mathsf{par}(x) \qquad \text{e} \qquad \mathsf{impar}(x+1)$$

Ambas as propriedades são atómicas. O exemplo descreve, no entanto, uma relação de implicação entre ambos que será, claramente, expressa usando o conectivo proposicional $\supset$

$$\mathsf{par}(x) \supset \mathsf{impar}(x+1)$$

Esta propriedade é indeterminada, porque contém a variável x que representa uma quantidade indeterminada. A propriedade pode-se tornar determinada se a ela for aplicado um *quantificador*. A essência do exemplo é que a afirmação feita deve ser válida *qualquer que seja* a quantidade que x representa. Por isso o quantificado aqui usado é o **quantificador universal** e a propriedade poderá ser escrita

$$\forall x.\, \mathsf{par}(x) \supset \mathsf{impar}(x+1)$$

$$\square$$

O exemplo (iii) do mesmo acetato apresenta dois objectos indeterminados (país e cidade) denotados pelas variáveis P e C. Duas propriedades "*ser país*" e "*ser cidade*", são representados pelos *símbolos de predicado* pais e cidade.

$$\mathsf{pais}(P) \qquad , \qquad \mathsf{cidade}(C)$$

A propriedade "*ser capital de*" é representada pelo símbolo de predicado binário $\mathsf{capital\text{-}de}$; aplicado a P e C origina o predicado atómico $\mathsf{capital\text{-}de}(P, C)$.

(*continua*)

Estes três predicados atómicos são todos indeterminados. Para os determinar (traduzindo o sentido do exemplo) é necessário juntar quantificadores.

Pretende-se traduzir o conceito que, par todo P, caso se verifique $\mathsf{pais}(P)$, existe C que verifica $\mathsf{cidade}(C)$ e verifica $\mathsf{capital\text{-}de}(P, C)$.

Ou seja

$$\forall P.\ \mathsf{pais}(P) \supset (\exists C.\ \mathsf{cidade}(C) \wedge \mathsf{capital\text{-}de}(P, C))$$

Os dois quantificadores ($\forall$ e $\exists$) – um por cada uma das variáveis – determinam os predicados.

$\square$

Sintaxe

Dado um conjunto de símbolos constantes $\mathcal{C}$ de símbolos de funções $\mathcal{F}$, de símbolos de variáveis $\mathcal{V}$ e de símbolos de predicados $\mathcal{P}$, define-se

Termos O menor conjunto de entidades $\mathcal{T}$ gerado por

$$\mathcal{T} ::= \mathcal{V} \mid \mathcal{C} \mid \mathcal{F}\,\mathcal{T} \cdots \mathcal{T}$$

Predicados atómicos O menor conjunto $\mathcal{L}_a$ gerado por

$$\mathcal{L}_a ::= \perp \mid \mathcal{P}\,\mathcal{T} \cdots \mathcal{T}$$

Predicados (fórmulas) O menor conjunto $\mathcal{L}$ gerado por

$$\mathcal{L} ::= \mathcal{L}_a \mid \neg\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \vee \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \supset \mathcal{L} \mid \forall\mathcal{V}.\,\mathcal{L} \mid \exists\mathcal{V}.\,\mathcal{L}$$

$\square$

A noção de termo e predicado determinado é expresso através da noção de *variável livre* e de *variável ligada* numa fórmula.

Um termo ou um predicado atómico que não contenha variáveis diz-se **fechado** ou **determinado**.

Num predicado genérico P uma variável associada a um quantificador diz-se **ligada em** P; uma variável que não está associada a nenhum quantificador diz-se **livre em** P. Um predicado sem variáveis livres diz-se **fechado** ou **determinado**.

O seguinte programa PROLOG determina o conjunto de variáveis livres num predicado genérico. Dada a possível ambiguidade na representação de variáveis e constantes como átomos PROLOG, o parâmetro `V` é usado para definir o conjunto de variáveis em cada predicado PROLOG.

```
% variáveis livres
livres(V,-(P),  U) :- livres(V,P,U).
livres(V,P & Q ,U) :- livres(V,P,U1), livres(V,Q,U2), uniao(U1,U2,U).
livres(V,P v Q ,U) :- livres(V,P,U1), livres(V,Q,U2), uniao(U1,U2,U).
livres(V,P => Q,U) :- livres(V,P,U1), livres(V,Q,U2), uniao(U1,U2,U).
livres(V,qualquer(X,P),U) :- livres(V,P,U1), delete(U1,X,U).
livres(V,existe(X,P) , U) :- livres(V,P,U1), delete(U1,X,U).
livres(V,P,U)      :- P =.. [_|Args], varss(V,[],Args,U).

% variáveis acumuladas em termos
vars(V,U1,T,U)   :- atom(T),
        ((member(T,V),\+ member(T,U1)) ->  U = [T|U1] ; U = U1).
vars(V,U1,T,U)   :- T =.. [_|Args], varss(V,U1,Args,U).
varss(_,U,[],U).
varss(V,U1,[H|R],U) :-  vars(V,U1,H,U2), varss(V,U2,R,U).
```

Exemplos

```
| ?- livres([x,y], p(x) => qualquer(y, q(y,x)), U).
U = [x] ?
yes
| ?- livres([x,y], p(x) => qualquer(x, q(y,x)), U).
U = [x,y] ?
yes
```

Substituição

Para determinar fórmulas indeterminadas (e além do uso de quantificadores) é possível usar *substituições*.

A **substituição num termo** t de uma variável x por um segundo termo μ é uma transformação de termos cujo resultado se escreve

$$t\,[\mu/x] \qquad \text{ou} \qquad t\,[x := \mu]$$

A substituição define-se indutivamente na forma do termo:

(i) Se t coincide com x então $t[\mu/x] \equiv \mu$; todos os outros átomos (constantes ou variáveis diferentes de x) não são afectados pela substituição.

(ii) Em alternativa a substituição de t obtém-se aplicando a substituição aos argumentos desse termo.

O seguinte programa Prolog implementa a substituição em termos; cada substituição $[t/x]$ é representada por um par `[x,t]`.

```
% substituicao em termos
subsT(V,[X,T],Y,U) :- atom(Y), member(X,V), (X == Y -> U=T ; U=Y).
subsT(V,[X,T],W,U) :-
     W=..[F|As], subsTs(V,[X,T],As,Bs), U =..[F|Bs].
subsTs(V,[X,T],Ts,Us) :- map(Ts,subsT(V,[X,T]),Us).
```

$\square$

A **substituição numa fórmula** Φ de uma variável x por um termo μ é uma transformação que só afecta Φ se x for uma variável livre nessa fórmula.

Nesse caso a fórmula transformada, representada por

$$\Phi\,[\mu/x] \qquad \text{ou} \qquad \Phi\,[x := \mu]$$

define-se da mesma forma indutiva usada na substituição em termos:

(i) $\Phi\,[\mu/x] \equiv \Phi$ se x não é livre em Φ.

(ii) Se x é livre em Φ e $\Phi \equiv \mathsf{Op}\,\Phi_1 \ldots \Phi_n$, em que Op é um dos prefixos $\forall y.$ ou $\exists y.$, é um conectivo ou é um símbolo de predicado, então a substituição x em Φ obtém-se aplicando essa mesma substituição a cada um dos elementos $\Phi_1 \ldots \Phi_n$.

O seguinte propgrama PROLOG implementa esta definição em três cláusulas para o predicado subsF: a primeira aplica-se a fórmulas quantificadas, a segunda a fórmulas construídas por conectivos e a terceira a predicados atómicos construídos a partir de termos. Só na 1ª cláusula é necessário verificar se a variável de substituição é livre ou não.

A última cláusula extende a substituição a listas de fórmulas.

```
% substituição em fórmulas
subsF(V,[X,T],W,U) :-
   W=.. [Op,Y,P], (Op= qualquer ; Op= existe),
   (X == Y -> P=Q ; subsF(V,[X,T],P,Q)), U=.. [Op,Y,Q].
subsF(V,[X,T],W,U) :-
   W=.. [Op|As], (Op= '-' ; Op= '&' ; Op= 'v' ; Op= '=>'),
   subsFs(V,[X,T],As,Bs), U=.. [Op|Bs].
subsF(V,[X,T],W,U) :-
   W=.. [Op|As], subsTs(V,[X,T],As,Bs), U=.. [Op|Bs].
subsFs(V,[X,T],Ws,Us) :- map(Ws,subsF(V,[X,T]),Us).
```

Exemplos de aplicação deste programa

```
| ?- subsF([x,y],[x,a], p(x) => qualquer(y,q(x) & p(y)), U).
U = p(a)=>qualquer(y,q(a)&p(y)) ?
yes
| ?- subsF([x,y],[x,a], p(x) => qualquer(x,q(x) & p(y)), U).
U = p(a)=>qualquer(x,q(x)&p(y)) ?
yes
```

Semântica

A LPO é formada por duas classes de entidades sintácticas: *termos* $\mathcal{T}$ (representando objectos) e *predicados* $\mathcal{L}$ (representando propriedades); assim dar significado à LPO implica definir o significado de termos e o significado de predicados.

Dar significado a um predicado Φ realiza-se verificando a sua **validade** num determinado modelo $\mathcal{M}$ expressa numa relação

$$\mathcal{M} \models \Phi$$

Dar significado a um termo bem determinado t (i.e. um termo sem variáveis) realiza-se associando esse termo a um objecto matemático bem determinado $\mu \in S$ elemento de um conjunto S previamente escolhido. Uma tal associação $t \mapsto \mu$ designa-se por **interpretação** do termo t na estrutura S e é descrita por uma função

$$\sigma \,:\, \mathcal{T} \longrightarrow S$$

Exemplo

Os termos 1, $1+1-1$ e $0+1$ são termos bem determinados, distintos entre si, que podem ser todos interpretados em $\mathbb{N}$ pela unidade 1.

Esta interpretação dá o mesmo significado aos três termos. Note-se, porém, que esta a interpretação $\mathcal{T} \to \mathbb{N}$, é apenas uma das interpretações possíveis; outras interpretações darão significados distintos aos três termos.

Nomeadamente é possível tomarmos para estrutura $S \equiv \mathcal{T}$ e, como função de interpretação σ, a função identidade; isto é, cada termo é interpretado por si próprio e dois termos distintos são sempre interpretados de modo diferente.

$\Box$

A interpretação dada por $S \equiv \mathcal{T}$ e $\sigma \equiv \mathsf{id}$ chama-se **interpretação de Herbrand** e os modelos que daí resultam chamam-se **modelos de Herbrand**.

A interpretação de Herbrand só define significado de termos determinados. Para um termo t com variáveis é necessário definir valores para as várias variáveis que podem ocorrer nesse termo.

A associação de valores a variáveis é feita pela noção de *atribuição*: isto é, uma função que associa variáveis a elementos da estrutura de interpretação S. Na interpretação de Herbrand $S \equiv \mathcal{T}$; portanto são termos; logo

Numa interpretação de Herbrand uma **atribuição** é uma função

$$v : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}$$

Dado um termo t representamos por t^v o termo determinado que se obtém substituindo cada variável x pelo seu valor $v(x)$

$$t^v = t\,[v(x)/x] \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{V}$$

O programa PROLOG seguinte implementa atribuições como listas de pares `[x,t]`. Por exemplo a atribuição

$$\{\, x \mapsto a\,,\; y \mapsto b\,,\; z \mapsto c(a,b)\,\}$$

é representada pela lista `[[x,a],[y,b],[z,c(a,b)]]`.

O programa implementa a substituição múltipla através do "predicado de ordem superior" `foldr`.

```
% Substituição múltipla
subsFF(V,Atrib,W,U)  :- foldr(W,Atrib,subsF(V),U).
subsTT(V,Atrib,W,U)  :- foldr(W,Atrib,subsT(V),U).
```

Exemplo

```
| ?- subsTT([x,y,z],[[x,a],[y,b],[z,c(a,b)]], t(x,y,z), U).
U = t(a,b,c(a,b)) ?
yes
```

Modelos de Herbrand na LPO

Um **modelo de Herbrand** é um conjunto, finito ou não, de predicados atómicos determinados; i.e. predicados da forma $\mathsf{p}(t_1, \cdots, t_n)$ em que os termos t_i não contêm variáveis.

Exemplo

Numa linguagem com símbolos de predicado $\mathcal{P} \equiv \{ >, \mathsf{par} \}$ e constantes $\mathcal{C} \equiv \{ 0, 1, 2 \}$, o seguinte conjunto é um modelo de Herbrand,

$$\mathcal{M} \equiv \{ 2 > 1 \, , \, 1 > 0 \, , \, \mathsf{par}(0) \, , \, \mathsf{par}(2) \}$$

A definição de validade de predicados tem de considerar separadamente predicados determinados e predicados indeterminados; predicados indeterminados são válidos ou não consoante os valores eventualmente associados às suas variáveis livres.

Tal como nos termos a associação de variáveis a valores é feita por *atribuições* $v \colon \mathcal{V} \to \mathcal{T}$. Dado um predicado indeterminado Φ, define-se

$$\Phi^v \equiv \Phi\,[v(x)/x] \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{V} \tag{2}$$

Para um predicado determinado Φ, a validade exprime-se numa relação binária entre um modelo $\mathcal{M}$ e Φ escrita

$$\mathcal{M} \models \Phi$$

Se Φ é indeterminado a validade exprime-se numa relação ternária entre um modelo $\mathcal{M}$, uma atribuição v e o predicado Φ, escrita

$$\mathcal{M}, v \models \Phi$$

e definida, a partir da relação binária, por

$$\mathcal{M}, v \models \Phi \qquad \text{sse} \qquad \mathcal{M} \models \Phi^v \tag{3}$$

(*continua*)

A relação binária $\models$ para predicados determinados, atómicos ou gerados por conectivos, define-se indutivamente da forma usual:

- $\triangleright$ $\mathcal{M} \not\models \bot$
- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models \mathsf{p}(t_1 \ldots t_n)$ sse $\mathsf{p}(t_1 \ldots t_n) \in \mathcal{M}$
- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models \Phi \wedge \Psi$ sse $\mathcal{M} \models \Phi$ e $\mathcal{M} \models \Psi$
- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models \Phi \vee \Psi$ sse $\mathcal{M} \models \Phi$ ou $\mathcal{M} \models \Psi$
- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models \Phi \supset \Psi$ sse $\mathcal{M} \not\models \Phi$ ou $\mathcal{M} \models \Psi$

Para predicados quantificados determinados, em modelos de Herbrand, a sua validade pode ser definida percorrendo todas as eventuais substituições da variável de quantificação

- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models (\forall x.\, \Phi)$ sse $\mathcal{M} \models \Phi\,[t/x]$ para todo $t \in \mathcal{T}$
- $\triangleright$ $\mathcal{M} \models (\exists x.\, \Phi)$ sse $\mathcal{M} \models \Phi\,[t/x]$ para algum $t \in \mathcal{T}$

$\square$

A noção de validade aplica-se a teorias Γ

- $\triangleright$ Em *teorias fechadas* (nenhum $A \in \Gamma$ contém variáveis livres).
  $\mathcal{M} \models \Gamma$ se $\mathcal{M} \models A$ para todo $A \in \Gamma$
- $\triangleright$ Em *teorias abertas* (com variáveis livres):
  $\mathcal{M}, v \models \Gamma$ se $\mathcal{M}, v \models A$ para todo $A \in \Gamma$

e permite definir as noções de **consequência semântica**, **tautologia** e **inconsistência** percorrendo os vários modelos $\mathcal{M}$ e atribuições v.

- $\triangleright$ $\Gamma \models \Phi$ se $\mathcal{M}, v \models \Gamma$ implica $\mathcal{M}, v \models \Phi$ para todo $\mathcal{M}$ e todo v.
- $\triangleright$ Φ é uma *tautologia* se $\mathcal{M}, v \models \Phi$ para todo $\mathcal{M}$ e todo v.
- $\triangleright$ Γ é *inconsistente* se $\mathcal{M}, v \not\models \Gamma$ para <u>todo</u> $\mathcal{M}$ e <u>todo</u> v.

A noção de consequência semântica e de consistência de uma teoria são essenciais à correcção de sistemas de dedução na LPO.

15 Proposição *Seja* Γ *uma teoria e* Φ *um fórmula*

(a) *Verifica-se* $\Gamma \models \Phi$ *se e só se* $\{\Gamma, \neg\Phi\}$ *é inconsistente.*

(b) *Toda a teoria* Γ *que contenha* Φ *e* $\neg\Phi$ *é inconsistente.*

(c) *Se* Γ *é inconsistente e* $\Delta \supseteq \Gamma$ *então* Δ *é inconsistente.*

(d) *Se* $\{\Gamma, \neg\Phi\}$ *e* $\{\Gamma, \Phi\}$ *são inconsistentes, então* Γ *é inconsistente.*

(e) Γ *é inconsistente se e só se* Γ^v *é inconsistente para todo* v.

Face a (a), o resultados (b), (c) e (d) estabelecem, respectivamente, regras de *inclusão*, *monotonia* e *corte*.

A componente proposicional da LPO exprime-se da forma seguinte:

16 Proposição *Sejam* $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\beta}$ *predicados genéricos conjuntivos e disjuntivos definidos nos seguintes quadros.*

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\alpha_2}$
$P \wedge Q$	P	Q
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \supset Q)$	P	$\neg Q$

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\beta_1}$	$\boldsymbol{\beta_2}$
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$P \vee Q$	P	Q
$P \supset Q$	$\neg P$	Q

Então

(a) $\{\Gamma, \boldsymbol{\alpha}\}$ *é inconsistente se e só se* $\{\Gamma, \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}\}$ *é inconsistente.*

(b) $\{\Gamma, \boldsymbol{\beta}\}$ *é inconsistente se e só se* $\{\Gamma, \boldsymbol{\beta_1}\}$ *e* $\{\Gamma, \boldsymbol{\beta_2}\}$ *são inconsistentes.*

(c) $\{\Gamma, \neg\neg\Phi\}$ *é inconsistente se e só se* $\{\Gamma, \Phi\}$ *é inconsistente.*

As provas de ambos as proposições são uma consequência imediata das definições do acetato anterior.

5 Teorema *Seja* $t \in \mathcal{T}$ *um termo fechado e* a *uma qualquer variável que não ocorre em* Γ *ou* Φ .

(a) *Se a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,(\forall x.\,\Phi)\,,\,\Phi[t/x]\,\}$ *é inconsistente então também a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,(\forall x.\,\Phi)\,\}$ *é inconsistente.*

(b) *Se a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,(\exists x.\,\Phi)\,,\,\Phi[\mathsf{a}/x]\,\}$ *é inconsistente então também a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,(\exists x.\,\Phi)\,\}$ *é inconsistente.*

(c) *Se a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,\neg(\exists x.\,\Phi)\,,\,\neg\Phi[t/x]\,\}$ *é inconsistente então também* $\{\,\Gamma\,,\,\neg(\exists x.\,\Phi)\,\}$ *é inconsistente.*

(d) *Se a teoria* $\{\,\Gamma\,,\,\neg(\forall x.\,\Phi)\,,\,\neg\Phi[\mathsf{a}/x]\,\}$ *é inconsistente então também* $\{\,\Gamma\,,\,\neg(\forall x.\,\Phi)\,\}$ *é inconsistente.*

Prova A prova formal deste importante teorema pode ser vista no texto de *M. Fitting* (citado como referência complementar deste curso). Um esquema de prova pode, no entanto ser apresentado para dois dos resultados:

Em (a), se $\{\Gamma, (\forall x.\,\Phi)\}$ fosse válido para algum modelo $\mathcal{M}$ e atribuição v então seria $\mathcal{M}, v \models \Phi[t/x]$ contrariando a inconsistência de $\{\Gamma, (\forall x.\,\Phi), \Phi[t/x]\}$.

Em (b), se $\{\Gamma, (\exists x.\,\Phi)\}$ fosse válido num par $\mathcal{M}, v$ existiria um termo t tal que $\mathcal{M}, v \models \Phi[t/x]$. Definindo uma nova atribuição $v' = v \cup \{\mathsf{a} \mapsto t\}$, é possível construir um par $\mathcal{M}, v'$ que valida todas as fórmulas em Γ, Φ que o anterior par validava (o que é possível porque a não ocorre em Γ, Φ) e ainda valida $\Phi[\mathsf{a}/x]$. Portanto $\{\Gamma, (\exists x.\,\Phi), \Phi[\mathsf{a}/x]\}$ não poderia ser inconsistente o que contraria a nossa hipótese.

Os resultados (c) e (d) provam-se de forma análoga a (a) e a (b).

$\square$

Note-se que, em (b), a "*nova*" variável a pode ser vista como um *identificador* para o valor específico t onde Φ é válido. Para não criar ambiguidades com nomes existentes tem de ser diferente dos outros identificadores que ocorrem em Γ, Φ . Esta abordagem é seguida na definição de sistemas de dedução baseados neste resultado.

Do mesmo modo que fórmulas proposicionais de agrupam em fórmulas $\boldsymbol{\alpha}$ (conjuntivas) e fórmulas $\boldsymbol{\beta}$ (disjuntivas), também as fórmulas quantificadas se podem agrupar em fórmulas $\boldsymbol{\delta}$, ditas *universais*, e fórmulas $\boldsymbol{\gamma}$, ditas *existenciais*.

Se acordo com os seguintes quadros, para cada termo termo fechado t, uma fórmula $\boldsymbol{\delta}$ está associado a uma fórmula $\boldsymbol{\delta}(t)$ e, para cada variável $\mathbf{a}$, uma fórmula $\boldsymbol{\gamma}$ está associado a uma fórmula $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})$.

$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{\delta}(t)$
$\forall x.\, \Phi$	$\Phi[t/x]$
$\neg\exists x.\, \Phi$	$\neg\Phi[t/x]$

$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})$
$\exists x.\, \Phi$	$\Phi[\mathbf{a}/x]$
$\neg\forall x.\, \Phi$	$\neg\Phi[\mathbf{a}/x]$

5 Corolário Seja $t \in \mathcal{T}$ um qualquer termo fechado e a uma qualquer variável que não ocorre em Γ ou $\boldsymbol{\gamma}$.

(a) $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\delta}\,,\,\boldsymbol{\delta}(t)\,\}$ é inconsistente se e só se $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\delta}\,\}$ é inconsistente.

(b) $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})\,\}$ é inconsistente se e só se $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\}$ é inconsistente.

Prova

Para as fórmulas $\boldsymbol{\delta}$ a proposição 15 diz-nos que a inconsistência de $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\delta}\,\}$ implica a inconsistência de $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\delta}\,,\,\boldsymbol{\delta}(t)\,\}$. O teorema 5 determina o resultado inverso: a inconsistência da segunda teoria implica a inconsistência da primeira.

Para fórmulas $\boldsymbol{\gamma}$, sendo $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})\,\}$ inconsistente também será inconsistente $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,,\,\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})\,\}$ (proposição 15) e, pelo teorema 5, é inconsistente $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\}$.

Inversamente, sendo $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}\,\}$ inconsistente, assumindo que $\{\,\Gamma\,,\,\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})\,\}$ não é inconsistente obtem-se uma contradição.

Tomemos, por exemplo, o caso $\boldsymbol{\gamma} \equiv \exists x.\Phi$. Se $\{\Gamma, \Phi[\mathbf{a}/x]\}$ não for inconsistente existitirá um modelo $\mathcal{M}$ e uma atribuição v que valida Γ e $\Phi[\mathbf{a}/x]$. Usando a "testemunha" $t \equiv v(\mathbf{a})$, esse modelo validará também $\exists x.\, \Phi$ contrariando a hipótese de inconsistência de $\{\Gamma, \exists x.\, \Phi\,\}$.

Sistemas de Dedução Hilbertianos para a LPO

Recordemos, no módulo I, a definição de sistema de dedução hilbertiano no acetato 13 e apresentação de um tal sistema para a LP no acetato 14.

Pretende-se estender estas noções para a LPO; para tal vamos começar por uma LPO mínima determinada por conectivos $\supset, \neg$ e pelo quantificador $\forall$.

A definição de sistema de dedução mantém-se como se mantêm os três axiomas e a regra do *Modus Ponens.* A introdução do quantificador exige dois novos axiomas e uma nova regra de inferência.

(A_1) $P \supset Q \supset P$

(A_2) $(P \supset Q \supset R) \supset (P \supset Q) \supset P \supset R$

(A_3) $(\neg P \supset Q) \supset (\neg P \supset \neg Q) \supset P$

(A_4) $(\forall x.\, P) \supset P[t/x]$ para todo o termo fechado t

(A_5) $(\forall x.\, P \supset Q) \supset P \supset (\forall x.\, Q)$ se x não é livre em P.

(MP) $$\frac{P \quad P \supset Q}{Q}$$ *Modus Ponens*

(Gen) $$\frac{P}{\forall x.\, P}$$ *Generalização*

O axioma (A_4) traduz a *instanciação* de um predicado quantificado a um determinação particular. O axioma (A_5) define a distributividade da quantificação universal em relação à implicação quando o antecedente desta não depende da variável de quantificação.

A *regra da generalização* diz que, se for possível deduzir P sem que tal dependa do valor de x, então P é universalmente válido qualquer que seja o valor associado a x.

Nestas circunstâncias é legítimo concluir a validade de $(\forall x.\, P)$.

Exemplo 1 Prova hilbertiana para a relação $(\forall x.\, \neg P) \vdash \neg(\forall x.\, P)$ recorrendo aos dois resultados **trans** e **dneg** provados nos acetatos 15 e 16 do módulo I.

$\neg(\forall x.\, P)$	$[\ \forall x.\, \neg P\ ]$
1. $\neg(\forall x.\, P)$	**MP** 2,3,4
2. $(\neg\neg(\forall x.\, P) \supset P[t/x]) \supset (\neg\neg(\forall x.\, P) \supset \neg P[t/x]) \supset$	
$\supset \neg(\forall x.\, P)$	$\mathbf{A}_3$
3. $\neg\neg(\forall x.\, P) \supset P[t/x]$	**trans** 5,6
4. $\neg\neg(\forall x.\, P) \supset \neg P[t/x]$	**MP** 7,8
5. $\neg\neg(\forall x.\, P) \supset (\forall x.\, P)$	**dneg**
6. $(\forall x.\, P) \supset P[t/x]$	$\mathbf{A}_4$
7. $\neg P[t/x] \supset (\neg\neg(\forall x.\, P) \supset \neg P[t/x])$	$\mathbf{A}_1$
8. $\neg P[t/x]$	**MP** 9,10
9. $(\forall x.\, \neg P) \supset \neg P[t/x]$	$\mathbf{A}_4$
10. $\forall x.\, \neg P$	**hipótese**

A mesma consequência, agora em foram semântica $(\forall x.\, \neg P) \models \neg(\forall x.\, P)$, pode ser facilmente provada usando os três resultados dos acetatos 11 e 12.

Note-se (pela proposição 15) que esta consequência é equivalente à inconsistência da teoria $\{\, (\forall x. \neg P)\, ,\, \neg\neg(\forall x. P)\,\}$. A prova constrói-se através de um *quadro de inconsistências* onde, sucessivamente, se registam as teorias cuja eventual inconsistência justifica a inconsistência das teorias que as precedem.

O processo para quando só restam teorias trivialmente inconsistentes.

$(\forall x.\, \neg P) \models \neg(\forall x.\, P)$	
1. $\{\, (\forall x.\, \neg P)\, ,\, \neg\neg(\forall x.\, P)\,\}$	prop. 16 (a)
2. $\{\, (\forall x.\, \neg P)\, ,\, (\forall x.\, P)\,\}$	teor. 5 (a)
3. $\{\, (\forall x.\, \neg P)\, ,\, \neg P[t/x]\, ,\, (\forall x.\, P)\,\}$	teor. 5 (a)
4. $\{\, (\forall x.\, \neg P)\, ,\, \neg P[t/x]\, ,\, P[t/x]\, ,\, (\forall x.\, P)\,\}$	prop. 15 (b)

Nem sempre a simplicidade da prova beneficia de modo tão claro a abordagem semântica. É o que se constata no seguinte exemplo.

Exemplo 2 Prova para a relação $(\forall x.\, P \supset Q), (\forall x.\, P) \vdash \forall x.\, Q$.

$\forall x.\, Q$	$[\,(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\forall x.\, P)\,]$

1.	$\forall x.\, Q$	**Gen** 2
2.	Q	**MP** 3,4
3.	$P \supset Q$	**MP** 5,6
4.	P	**MP** 7,8
5.	$(\forall x.\, P \supset Q) \supset (P \supset Q)$	$\mathbf{A}_4$
6.	$(\forall x.\, P \supset Q)$	**hipótese**
7.	$(\forall x.\, P) \supset P$	$\mathbf{A}_4$
8.	$(\forall x.\, P)$	**hipótese**

O *quadro de inconsistências* será

$(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\forall x.\, P) \models \forall x.\, Q$

1.	$\{\,(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\forall x.\, P)\,,\,\neg(\forall x.\, Q)\,\}$	teor. 5 (d)
2.	$\{\,(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\forall x.\, P)\,,\,\neg(\forall x.\, Q)\,,\,\neg Q[a/x]\,\}$	teor. 5 (a)
3.	$\{\,(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P[a/x] \supset Q[a/x]\,,$	
	$(\forall x.\, P)\,,\,P[a/x]\,,\,\neg(\forall x.\, Q)\,,\,\neg Q[a/x]\,\}$	prop. 15 (c)
4.	$\{\,P[a/x] \supset Q[a/x]\,,\,P[a/x]\,,\,\neg Q[a/x]\,\}$	prop. 16 (c)
5.	$\{\,\neg P[a/x]\,,\,P[a/x]\,,\,\neg Q[a/x]\,\}\,,$	
	$,\,\{\,Q[a/x]\,,\,P[a/x]\,,\,\neg Q[a/x]\,\}$	prop. 15 (b)

Dedução Natural em LPO

Recordemos que a dedução natural é um sistema de dedução orientado à manipulação *global* das assunções; as assunções são classificadas como *abertas* ou *fechadas* e cada passo de dedução transforma estes dois conjuntos de fórmulas.

Na definição 8 (acetato II-3) introduziu-se a noção de *árvore de dedução natural* gerada, essencialmente, por *regras de inferência* (acetato II-2)

$$\frac{\begin{array}{cccc}[A_1] & [A_2] & & [A_n] \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n\end{array}}{C}$$

e assunções de hipóteses.

Vimos, também, que cada regra de inferência identifica uma *fórmula principal*, que contém o elemento sintáctico determinante para a aplicação da regra, e que, face à sua localização, se classica numa de duas classes: *regras de introdução*, quando a fórmula principal ocorre na conclusão da regra, ou *regra de eliminação* quando a fórmula principal ocorre em uma das premissas da regra.

A dedução natural em LPO preserva todas estas noções e extende-as a novas regras onde os quantificadores determinam as fórmulas principais: para cada quantificador introduz um novo par *regra de introdução+regra de eliminação.*

17 Definição *Uma árvore de dedução natural, na LPO; para a relação* $\Gamma \vdash \Phi$ *é uma árvore de dedução construída de acordo com a definição 8 usando todas as regras de inferência da LP e ainda as regras específicas apresentadas no acetato 18, tendo* Φ *como conclusão e todas as assunções abertas contidas em* Γ *.*

Regras da dedução natural na LPO

Em todas as regras seguintes t denota um termo fechado arbitrário e $\mathbf{a}$ uma "*variável fresca*", isto é, uma variável que não ocorre, ao longo da dedução, na conclusão ou em qualquer assunção aberta que não seja da forma $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})$.

Todas as regras da LP (acetato II-4) e ainda

Regras de Introdução

$$\frac{\Phi[\mathbf{a}/x]}{(\forall x.\,\Phi)}\ (\mathsf{I}_\forall) \qquad\qquad \frac{\Phi[t/x]}{(\exists x.\,\Phi)}\ (\mathsf{I}_\exists)$$

Regras de Eliminação

$$\frac{(\forall x.\,\Phi)}{\Phi[t/x]}\ (\mathsf{E}_\forall) \qquad\qquad \frac{(\exists x.\,\Phi) \qquad \begin{array}{c}[\Phi[\mathbf{a}/x]]\\ P\end{array}}{P}\ (\mathsf{E}_\exists)$$

$\square$

Exemplos

Árvores de dedução para $(\forall x.\,P) \supset (\exists x.\,P)$ e $(\forall x.\,P \supset Q), (\forall x.\,P) \vdash (\forall x.\,Q)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\forall x.\,P)}\ (1)}{P[t/x]}\ \mathsf{E}_\forall}{(\exists x.\,P)}\ \mathsf{I}_\exists}{(\forall x.\,P) \supset (\exists x.\,P)}\ \mathsf{I}_\supset(1) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.\,P \supset Q}{P[\mathbf{a}/x] \supset Q[\mathbf{a}/x]}\ \mathsf{E}_\forall \qquad \dfrac{\forall x.\,P}{P[\mathbf{a}/x]}\ \mathsf{E}_\forall}{Q[\mathbf{a}/x]}\ \mathsf{E}_\supset}{\forall x.\,Q}\ \mathsf{I}_\forall$$

Correcção

A correcção de uma regra de inferência genérica

$$\frac{\begin{matrix}[A_1] & [A_2] & & [A_n] \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n\end{matrix}}{C}$$

deve ser interpretada semanticamente por

$$\Gamma, A_1 \models P_1 \quad \& \cdots \& \quad \Gamma, A_n \models P_n \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models C$$

Equivalentemente

$\boxed{\text{se todos os } \{\,\Gamma\,,\,A_i\,,\,\neg P_i\,\} \text{ são inconsistentes então } \{\,\Gamma\,,\,\neg C\,\} \text{ é inconsistente.}}$

A verificação desta condição pode ser usada para justificar a correcção de cada uma das novas regras de inferência:

($\mathsf{I}_\forall$) *Se* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\Phi[\mathbf{a}/x]\,\}$ *é inconsistente então* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\forall x.\,\Phi\,\}$ *é inconsistente.*

É consequência do corolário 5 (b).

($\mathsf{I}_\exists$) *Se* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\Phi[t/x]\,\}$ *é inconsistente então* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\exists x.\,\Phi\,\}$ *é inconsistente.*

Se $\{\,\Gamma\,,\,\neg\Phi[t/x]\,\}$ é inconsistente também $\{\,\Gamma\,,\,\neg\Phi[t/x]\,,\,\neg\exists x.\Phi\,\}$ é inconsistente (proposição 16). Usando o corolário 5 (a) conclui-se a inconsistência de $\{\,\Gamma\,,\,\neg\exists x.\,\Phi\,\}$.

($\mathsf{E}_\forall$) *Se* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\forall x.\,\Phi\,\}$ *é inconsistente então* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\Phi[t/x]\,\}$ *é inconsistente.*

Se $\{\Gamma, \neg\forall x.\,\Phi\}$ é inconsistente então $\{\Gamma, \neg\Phi[t/x], \neg\forall x.\,\Phi\}$ é inconsistente (*monotonia*). Também $\{\Gamma, \neg\Phi[t/x], \forall x.\,\Phi\}$ é sempre inconsistente como resultado do corolário 5 (a). Usando a proposição 15 (*corte*) conclui-se que $\{\Gamma, \neg\Phi[t/x]\}$ é inconsistente.

($\mathsf{E}_\exists$) *Se* $\{\,\Gamma\,,\,\neg\exists x.\,\Phi\,\}$ *e* $\{\,\Gamma\,,\,\Phi[\mathbf{a}/x]\,,\,\neg P\,\}$ *são inconsistentes, então* $\{\,\Gamma\,,\,\neg P\,\}$ *é inconsistente.*

Sendo $\{\Gamma, \neg\exists x.\,\Phi\}$ inconsistente é inconsistente $\{\Gamma, \neg P, \neg\exists x.\,\Phi\}$ (*monotonia*). Por outro lado, sendo $\{\Gamma, \Phi[\mathbf{a}/x], \neg P\}$ inconsistente, pelo corolário 5 (b) é inconsistente $\{\Gamma, \exists x.\,\Phi, \neg P\}$. Usando a proposição 15 (*corte*) conclui-se que $\{\Gamma, \neg P\}$ é inconsistente.

Um exercício em regras de eliminação

Dedução natural para a relação $(\exists x.\, P \vee Q) \vdash (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$ usando duas técnicas equivalentes: construção da árvore de prova por *propagação em progresso* e construção do quadro de prova por *propagação em retrocesso.*

$$\dfrac{\exists x.\, P \vee Q \qquad \dfrac{\dfrac{}{P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P[\mathbf{a}/x]}\,(2)}{\exists x.\, P}\,\mathsf{I}_\exists}{\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q}\,\mathsf{I}_{\vee 1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q[\mathbf{a}/x]}\,(2)}{\exists x.\, Q}\,\mathsf{I}_\exists}{\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q}\,\mathsf{I}_{\vee 2}}{\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q}\,\mathsf{E}_\vee(2)}{\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q}\,\mathsf{E}_\exists(1)$$

$\square$

$(\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$[\,\exists x.\, P \vee Q\,]$	
1. $(\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$[\exists x.\, P \vee Q]$	$\mathsf{E}_\exists$
1. $\exists x.\, P \vee Q$	$[\exists x.\, P \vee Q]$	ass
2. $(\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$[\exists x.\, P \vee Q\,,\, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]]$	$\mathsf{E}_\vee$
1. $P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]]$	ass
2. $\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], P[\mathbf{a}/x]]$	$\mathsf{I}_{\vee 1}$
1. $\exists x.\, P$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], P[\mathbf{a}/x]]$	$\mathsf{I}_\exists$
1. $P[\mathbf{a}/x]$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], P[\mathbf{a}/x]]$	ass
3. $\exists x.\, P \vee \exists x.\, Q$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], Q[\mathbf{a}/x]]$	$\mathsf{I}_{\vee 2}$
1. $\exists x.\, Q$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], Q[\mathbf{a}/x]]$	$\mathsf{I}_\exists$
1. $Q[\mathbf{a}/x]$	$[\exists x.\, P \vee Q, P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x], Q[\mathbf{a}/x]]$	ass

Nota:

O uso da regra $\mathsf{I}_\exists$ permite escolher o termo t que seja mais conveniente ao desenvolvimento da prova. Neste exemplo escolheu-se $t \equiv \mathbf{a}$

Dedução Natural com Sequentes em LPO

Na construção de provas por propagação em retrocesso o exemplo do acetato 20 sugere bem como é vantajoso lidar só com assunções locais. Tal como na LP, a noção de *sequente* junta assunções a cada nodo da árvore; para tal, combina no mesmo objecto, $\Gamma \Rightarrow C$, assunções Γ e conclusão C.

Regras de Introdução

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Phi[\mathbf{a}/x]}{\Gamma \Rightarrow (\forall x.\, \Phi)}\ (\mathsf{I}_\forall) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Phi[t/x]}{\Gamma \Rightarrow (\exists x.\, \Phi)}\ (\mathsf{I}_\exists)$$

Regras de Eliminação

$$\frac{\Gamma \Rightarrow (\forall x.\, \Phi)}{\Gamma \Rightarrow \Phi[t/x]}\ (\mathsf{E}_\forall) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow (\exists x.\, \Phi) \quad \Delta, \Phi[\mathbf{a}/x] \Rightarrow P}{\Gamma, \Delta \Rightarrow P}\ (\mathsf{E}_\exists)$$

Nestas regras, t denota qualquer termo e $\mathbf{a}$ denota uma variável "fresca": isto é, que não ocorre em Φ, P ou nas assunções Γ e Δ.

Exemplo

$$(\exists x.\, P \vee Q) \Rightarrow (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$$

1. $(\exists x.\, P \vee Q) \Rightarrow (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{E}_\exists$
1. $(\exists x.\, P \vee Q) \Rightarrow (\exists x.\, P \vee Q)$	ass
2. $P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{E}_\vee$
1. $P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x] \Rightarrow P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]$	ass
2. $P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{I}_{\vee 1}$
1. $P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, P)$	$\mathsf{I}_\exists$
1. $P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow P[\mathbf{a}/x]$	ass
3. $Q[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{I}_{\vee 2}$
1. $Q[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{I}_\exists$
1. $Q[\mathbf{a}/x] \Rightarrow Q[\mathbf{a}/x]$	ass

Estados de Provas para a LPO

As noções de estado de prova e de dedução apresentadas na definição 13 (acetato II-26) aplicam-se directamente à construção de provas por propagação em retrocesso na LPO.

As definições de aceitação (e refutação) de sequentes e de de correcção de estados de prova necessitam de ser adaptadas à LPO.

18 DEFINIÇÃO *Um sequente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *é* ***aceite*** *se* $\{\Gamma, \neg\Delta\}$ *é inconsistente; o mesmo sequente é* ***refutado*** *se existe algum modelo* $\mathcal{M}$ *e atribuição* v *que verifique* $\mathcal{M}, v \models \Gamma, \neg\Delta$.

Se $C, S_1, \cdots, S_n$ *são sequentes, o estado de prova*

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_n}{C}$$

é ***correcto*** *se a refutação de* C *implica a refutação de um dos* S_i *(ou quando a aceitação de todos os* S_i *implica a aceitação de* C*).*

A noção de sequente *fechado por assunções*[a] mantém-se da LP assim como se mantém a noção de *resolução* de dois estados de prova.

Prova-se facilmente que a proposição 7[b] e a proposição 8[c] continuam a ser válidas na LPO.

[a] com uma fórmula P comum ao antecedente Γ e ao consequente Δ
[b] a conclusão de uma dedução correcta deve ser aceite
[c] uma folha é um estado de prova correcto assim como é correcta qualquer resolução de estados de prova correctos

Sistema (LK+CORTE) na LPO

Regra do Corte

$$\frac{\Gamma, C \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \ (\text{corte})$$

Regras “Direitas” (conclusões)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow Q, \Delta}{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q, \Delta} \ (\mathsf{D}_\wedge) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P, Q, \Delta}{\Gamma \Rightarrow P \vee Q, \Delta} \ (\mathsf{D}_\vee)$$

$$\frac{\Gamma, P \Rightarrow Q, \Delta}{\Gamma \Rightarrow P \supset Q, \Delta} \ (\mathsf{D}_\supset) \qquad \frac{\Gamma, P \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg P, \Delta} \ (\mathsf{D}_\neg)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, P[\mathbf{a}/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\forall x.\, P)} \ (\mathsf{D}_\forall) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\exists x.\, P), P[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\exists x.\, P)} \ (\mathsf{D}_\exists)$$

Regras “Esquerdas” (assunções)

$$\frac{\Gamma, P, Q \Rightarrow \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\wedge) \qquad \frac{\Gamma, P \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, Q \Rightarrow \Delta}{\Gamma, P \vee Q \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\vee)$$

$$\frac{\Gamma, Q \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow P, \Delta}{\Gamma, P \supset Q \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\supset) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P, \Delta}{\Gamma, \neg P \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\neg)$$

$$\frac{\Gamma, (\forall x.\, P), P[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (\forall x.\, P) \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\forall) \qquad \frac{\Gamma, P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (\exists x.\, P) \Rightarrow \Delta} \ (\mathsf{E}_\exists)$$

Nestas regras, t denota qualquer termo e $\mathbf{a}$ denota uma variável “fresca”: isto é, que não ocorre em P ou nas teorias Γ e Δ.

Notas

Recordemos o sistema LK+CORTE da LP onde todas as regras, com excepção da regra do corte, eram regras de introdução.

Um tal sistema de dedução pode ser aumentado com duas novas regras (uma *regra esquerda* e uma *regra direita*) para cada um dos quantificadores daí resultando uma versão de LK+CORTE aplicável à LPO.

As 4 novas regras ($\mathsf{D}_\forall$, $\mathsf{D}_\exists$, $\mathsf{E}_\forall$ e $\mathsf{E}_\exists$) têm algumas características que as distinguem das regras proposicionais:

(i) São impostas certas condições à aplicação das regras que não são expressas na lógica. São as condições impostas aos termos t e às variáveis $\mathbf{a}$.

Estas condições, conhecidos por "*provisos*", já apareciam nas regras da dedução natural.

(ii) A premissa da regra não é necessáriamente mais simples do que a conclusão. O objectivo de "fazer desaparecer um conectivo", realizável na LP por aplicação em retrocesso das regras, nem sempre é possível na LPO.

Correcção A correcção do estado de prova que cada regra representa é uma consequência imediata da definição 18 e do teorema 5.

($\mathsf{D}_\forall$) Se $\Gamma \Rightarrow \Delta, P[\mathbf{a}/x]$ é aceite, $\{\Gamma, \neg\Delta, \neg P[\mathbf{a}/x]\}$ é inconsistente. Pelo teorema 5, também é inconsistente $\{\Gamma, \neg\Delta, \neg(\forall x.\, P)\}$ e, portanto, é aceite $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\forall x.\, P)$.

($\mathsf{E}_\forall$) Sendo $\Gamma, (\forall x.\ P), P[t/x] \Rightarrow \Delta$ aceite então $\{\Gamma, \neg\Delta, (\forall x.\ P), P[t/x]\}$ é inconsistente. Pelo teorema 5, também é inconsistente $\{\Gamma, \neg\Delta, (\forall x.\ P)\}$ e, portanto, é aceite $\Gamma, (\forall x.\, P) \Rightarrow \Delta$.

A correcção das regras ($\mathsf{D}_\exists$) e ($\mathsf{E}_\exists$) prova-se do mesmo modo.

Exemplos

Quadro de prova para a relação

$$(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\exists x.\, P) \vdash \exists x.\, Q$$

$(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\exists x.\, P) \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,(\exists x.\, P) \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{E}_\exists$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{E}_\forall$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P[\mathbf{a}/x] \supset Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{E}_\supset$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)$	$\mathsf{D}_\exists$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)\,,\,Q[\mathbf{a}/x]$	ass
2. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P[\mathbf{a}/x] \Rightarrow (\exists x.\, Q)\,,\,P[\mathbf{a}/x]$	ass

$\square$

Supondo que x não é livre em P, pretende-se um quadro de prova para

$$(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \vdash (\forall x.\, Q)$$

$(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \Rightarrow (\forall x.\, Q)$	
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \Rightarrow (\forall x.\, Q)$	$\mathsf{D}_\exists$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \Rightarrow Q[\mathbf{a}/x]$	$\mathsf{E}_\forall$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \supset Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P \Rightarrow Q[\mathbf{a}/x]$	$\mathsf{E}_\supset$
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P \Rightarrow Q[\mathbf{a}/x]$	ass
1. $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\,P \Rightarrow Q[\mathbf{a}/x]\,,\,P$	ass

Na aplicação da regra $\mathsf{E}_\forall$ escolhe-se $t \equiv \mathbf{a}$ e usa-se o facto de x não ser livre em P para simplificar $P[\mathbf{a}/x] \equiv P$.

Tableaux em LPO

Introdução

Os *tableaux* que vamos definir para a LPO pertencem à classe dos ***tableaux* semânticos** e são determinados de forma dual dos *tableaux* proposicionais definidos no módulo-III (acetatos 13-16).

Nomeadamente, para uma relação de dedução $\Gamma \vdash \Phi$, um *tableaux* semântico é uma representação de uma forma disjuntiva semanticamente equivalente à teoria $\{\Gamma\,,\,\neg\Phi\}$.[a]

Essa representação assume a forma de uma árvore: se a forma disjuntiva for $[\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n]$, o *tableaux* será a árvore cujos caminhos são os Γ_i .

Nota
Uma forma disjuntiva

$$\Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \cdots \vee \Gamma_n$$

é inconsistente quando todos os Γ_i forem inconsistentes. Se esta forma representar um *tableaux* a sua inconsistência pode ser determinada provando a inconsistência de todas as teorias Γ_i.

Assim a construção de "*tableaux*" em LPO justifica-se através da noção de inconsistência de teorias e recorre à proposição 16 (para fórmulas principais proposicionais) e ao corolário 5 (para fórmulas principais quantificadas).

Procuraremos provar a consequência $\Gamma \models \Phi$ através da inconsistência da teoria $\{\Gamma\,,\,\neg\Phi\}$ (proposição 15) e a construção do *tableaux* constrói formas disjuntivas cuja inconsistência é equivalente à inconsistência desta teoria.

O processo termina quando todas as teorias forem fechadas (contenham fórmulas P e $\neg P$). Nessas circunstâncias, como vimos na proposição 15, as teorias serão inconsistentes.

[a] Recordemos que o *tableaux* proposicional representava uma forma conjuntiva equivalente à forma $[[\neg\Gamma\,,\,\Phi]]$.

Expansão

A **expansão** de um predicado Φ, representado por Φ^* é uma das árvores

$$\begin{array}{ccccc} \neg\neg P & \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\gamma} \\ | & | & \diagup \quad \diagdown & | & | \\ P & \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_1 \qquad \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\delta}(t) & \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a}) \\ & | & & & \\ & \boldsymbol{\alpha}_2 & & & \end{array}$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ representam, respectivamente, a fórmula conjuntiva, a fórmula disjuntiva, a fórmula quantificada universalmente e a fórmula quantificada existencialmente genéricas definidas nos quadros seguintes.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\alpha_2}$
$P \wedge Q$	P	Q
$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$\neg(P \supset Q)$	P	$\neg Q$

$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\beta_1}$	$\boldsymbol{\beta_2}$
$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
$P \vee Q$	P	Q
$P \supset Q$	$\neg P$	Q

$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{\delta}(t)$
$\forall x.\, \Phi$	$\Phi[t/x]$
$\neg\exists x.\, \Phi$	$\neg\Phi[t/x]$

$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{a})$
$\exists x.\, \Phi$	$\Phi[\mathbf{a}/x]$
$\neg\forall x.\, \Phi$	$\neg\Phi[\mathbf{a}/x]$

e em que:

(i) t é um qualquer termo fechado.

(ii) $\mathbf{a}$ é uma variável *fresca*; isto é, uma variável que não ocorre ao longo do caminho onde é introduzida.

19 Definição *Um* tableaux *semântico para a teoria* $\Gamma \equiv \{P_1\,,\,\cdots\,,\,P_n\}$ *é uma árvore construída pelas seguintes regras:*

(1) A árvore não ramificada determinada pela sequência $[\,P_1, \cdots, P_n\,]$ *é um* tableau *para a teoria* Γ.

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array}$$

(2) Se $\mathbf{T}$ *é um* tableau *para a teoria* Γ*, se* Φ *é um nodo em* $\mathbf{T}$ *e se* Φ^* *é a* ***expansão*** *de* P *então a árvore que resulta da substituição de* Φ *por* Φ^* *em* $\mathbf{T}$ *é ainda um* tableau *para a mesma sequência.*

17 Proposição *Verifica-se* $\Gamma \models \Phi$ *se existir um* tableaux *semântico fechado para a teoria* $\{\Gamma\,,\,\neg\Phi\}$.

Esboço de prova
A relação $\Gamma \models \Phi$ é verificada sse é inconsistente $\{\Gamma\,,\,\neg\Phi\}$. Um *tableaux* é formado um conjunto de caminhos e cada caminho é visto como uma teoria: o *tableaux* representa uma forma disjuntiva inconsistente se todos os caminhos forem inconsistentes.

As regras de expansão dos *tableaux* asseguram a inconsistência de um caminho desde que a sua expansão seja inconsistente. Se o *tableaux* for fechado todos os caminhos serão fechados e, portanto, representarão teorias inconsistentes.

20 Definição *No sistema de* tableaux *semânticos para a LPO, uma dedução para a relação* $\Gamma \vdash \Phi$ *é um* tableaux *fechado para a teoria* $\{\Gamma\,,\,\neg\Phi\}$.

Nota
Esta definição de dedução, conjuntamente com a proposição 17, assegura que, sempre que existe uma dedução para relação $\Gamma \vdash \Phi$, verifica-se $\Gamma \models \Phi$.

Portanto este sistema de dedução é correcto. A noção de completude é muito mais difícil de analisar.

Exemplos

(1) Construir um *tableaux* para a relação $(\forall x.\, P) \vdash (\exists x.\, P)$.

O ponto de partida é a teoria $\{(\forall x.\, P)\,,\, \neg(\exists x.\, P)\}$ e o *tableaux* formado por esta sequência de predicados. A partir deste primeiro *tableaux*, usando as regras de expansão, procura-se atingir um *tableaux* que seja fechado

$$\begin{array}{c} (\forall x.\, P) \\ | \\ \neg(\exists x.\, P) \end{array}$$

Como o *tableaux* inicial contém dois predicados da classe $\boldsymbol{\delta}$ a construção é muito simples.
Expandindo duas vezes com a regra $\boldsymbol{\delta}$ constrói-se um *tableaux* com um único caminho e esse caminho é fechado.

$$\begin{array}{c} (\forall x.\, P) \\ | \\ \neg(\exists x.\, P) \\ | \\ P[t/x] \\ | \\ \neg P[t/x] \end{array}$$

(2) *Tableaux* para a relação $(\exists x.\, P) \vee (\forall x.\, Q) \vdash (\exists x.\, P \vee Q)$

Parte-se da teoria

$\{(\exists x.\, P) \vee (\forall x.\, Q)\,,\, \neg(\exists x.\, P \vee Q)\}$

Note-se que, na expansão dos predicados $(\exists x.\, P)$ e $(\exists x.\, Q)$, usam-se duas variáveis "frescas" distintas – $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
A expansão de $\neg(\exists x.\, P \vee Q)$ é realizada duas vezes; uma com o termo $t \equiv \mathbf{a}$ e uma segunda vez com o termo $t \equiv \mathbf{b}$.
É sempre possível expandir um predicado várias vezes e, tratando-se de um predicado $\boldsymbol{\delta}$, a expansão recorre a qualquer termo que seja conveniente para a prova.

$$\begin{array}{ccc} & (\exists x.\, P) \vee (\exists x.\, Q) & \\ & | & \\ & \neg(\exists x.\, P \vee Q) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \exists x.\, P & & \exists x.\, Q \\ | & & | \\ P[\mathbf{a}/x] & & Q[\mathbf{b}/x] \\ | & & | \\ \neg(P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x]) & & \neg(P[\mathbf{b}/x] \vee Q[\mathbf{b}/x]) \\ | & & | \\ \neg P[\mathbf{a}/x] & & \neg P[\mathbf{b}/x] \\ | & & | \\ \neg Q[\mathbf{a}/x] & & \neg Q[\mathbf{b}/x] \end{array}$$

(*continua*)

(3) *Tableaux* para a relação $(\forall x.\, P \supset Q)\,,\, (\exists x.\, P) \vdash (\exists x.\, Q)$.

Parte-se da teoria

$$\{(\forall x.\, P \supset Q)\,,\, (\exists x.\, P)\,,\, \neg(\exists x.\, Q)\}$$

Expande-se $(\exists x.\, P)$ – o único predicado $\boldsymbol{\gamma}$ desta teoria – introduzindo a variável "fresca" $\mathbf{a}$.
Os dois restantes predicados são da classe $\boldsymbol{\delta}$ e são expandidos com o termo $t \equiv \mathbf{a}$.

$$\begin{array}{c}
\neg(\exists x.\, Q) \\
| \\
(\forall x.\, P \supset Q) \\
| \\
(\exists x.\, P) \\
| \\
P[\mathbf{a}/x] \\
| \\
\neg Q[\mathbf{a}/x] \\
| \\
P[\mathbf{a}/x] \supset Q[\mathbf{a}/x] \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\neg P[\mathbf{a}/x] \qquad Q[\mathbf{a}/x]
\end{array}$$

(4) *Tableaux* para a relação $(\forall x.\, P \vee Q)\,,\, (\forall x.\, \neg P) \vdash (\forall x.\, Q)$.

Este exemplo é análogo ao anterior. Parte-se da teoria

$$\{(\forall x.\, P \vee Q)\,,\, (\forall x.\, \neg P)\,,\, \neg(\forall x.\, Q)\}$$

e expande-se, em primeiro lugar, o predicado $\boldsymbol{\gamma}$ – que aqui é $\neg(\forall x.\, Q)$.
Expandem-se depois os dois restantes predicados que são da classe $\boldsymbol{\delta}$; após a expansão da disjunção, ambos os caminhos deste *tableaux* ficam fechados.

$$\begin{array}{c}
\neg(\forall x.\, Q) \\
| \\
(\forall x.\, P \vee Q) \\
| \\
(\forall x.\, \neg P) \\
| \\
\neg Q[\mathbf{a}/x] \\
| \\
\neg P[\mathbf{a}/x] \\
| \\
P[\mathbf{a}/x] \vee Q[\mathbf{a}/x] \\
\diagup \qquad \diagdown \\
P[\mathbf{a}/x] \qquad Q[\mathbf{a}/x]
\end{array}$$