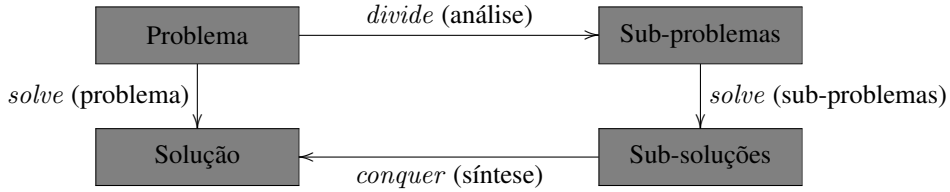
Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2018/19 - Ficha nr.° 11

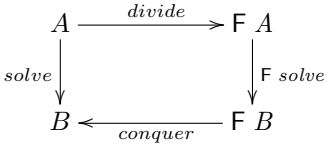
1. O desenho que se segue



descreve aquela que deve ser a principal competência de um programador: saber *dividir* um problema complexo em partes e juntar as respectivas sub-soluções para assim resolver o problema inicial.

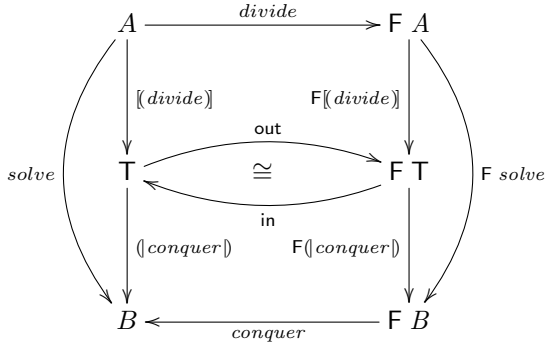
No Cálculo de Programas, esse desenho é captado pelo conceito de *hilomorfismo*,

$$solve = conquer \cdot (\mathsf{F}\ solve) \cdot divide \qquad \text{(F1)}$$



tendo-se[1]

$$solve = (\!|conquer|\!) \cdot [\!(divide)\!] \qquad \text{(F2)}$$



onde T é o tipo indutivo que tem F como base.[2] Apresente justificações para a derivação seguinte de um dos passos da demonstração do princípio da *hilo-factorização*, isto é, da equivalência entre (F1)

[1] Normalmente escreve-se $solve = [\![conquer, divide]\!]$.

[2] Esta estrutura intermédia é designada normalmente por estrutura de dados **virtual** por "não ser ver" quando o algoritmo executa, ficando escondida no 'heap' do sistema de 'run-time' da linguagem recursiva que está a ser utilizada.

e (F2):

$$
\begin{array}{ll}
 & solve = (\!|conquer|\!) \cdot [\!(divide)\!] \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & solve = (conquer \cdot \mathsf{F}\,(\!|conquer|\!) \cdot \mathsf{out}) \cdot (\mathsf{in} \cdot \mathsf{F}\,[\!(divide)\!] \cdot divide) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & solve = conquer \cdot \mathsf{F}\,(\!|conquer|\!) \cdot \mathsf{F}\,[\!(divide)\!] \cdot divide \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & solve = conquer \cdot \mathsf{F}\,((\!|conquer|\!) \cdot [\!(divide)\!]) \cdot divide \\
\Rightarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & solve = conquer \cdot \mathsf{F}\,solve \cdot divide \\
\Box &
\end{array}
$$

2. O algoritmo de "quick-sort" foi definido nas aulas teóricas como o hilomorfismo $qSort = (\!|inord|\!) \cdot [\!(qsep)\!]$ sobre árvores BTree, cujo catamorfismo recorre à função:

   $$inord = [\mathsf{nil}\ , f]\ \mathbf{where}\ f\ (x, (l, r)) = l +\!\!+ [x] +\!\!+ r$$

   Para um certo isomorfismo α, $h = (\!|inord \cdot \alpha|\!) \cdot [\!(qsep)\!]$ ordenará a lista de entrada por ordem inversa. Identifique α, justificando informalmente.

3. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u,

   $$A \xrightarrow{\ u\ } \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\ \mu\ } \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$$

   que satisfazem (para além das naturais, ie. "grátis") as propriedades

   $$\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u$$
   $$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu$$

   — identifique-as no formulário — com base nas quais se pode definir a *composição monádica*:

   $$f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T}\ f \cdot g.$$

   (Identifique-a também no formulário.) Demonstre os factos seguintes:

   $$\mu = id \bullet id \qquad \text{(F3)}$$
   $$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \qquad \text{(F4)}$$
   $$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\mathsf{T}\ g \cdot h) \qquad \text{(F5)}$$
   $$\mathsf{T}\ f = (u \cdot f) \bullet id \qquad \text{(F6)}$$

4. A função $discollect : (A \times B^*)^* \rightarrow (A \times B)^*$ que apareceu (sem ser definida) numa questão da ficha nº2 não é mais do que

   $$discollect = lstr \bullet id \qquad \text{(F7)}$$

   — onde $lstr\ (a, x) = [(a, b) \mid b \leftarrow x]$ — no mónade das listas, $\mathsf{T}\ A = A^*$,

   $$A \xrightarrow{\ singl\ } A^* \xleftarrow{\ \mathsf{concat}\ } (A^*)^*$$

   onde $u = singl$ e $\mu = \mathsf{concat} = (\!|[\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}]|\!)$. Recordando a lei de absorção-cata (para listas), derive uma definição recursiva para $discollect$ que não use nenhum dos combinadores 'point-free' estudados nesta disciplina.