Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2018/19 - Ficha nr.° 8

1. Apresente justificações para a seguinte demonstração da lei de "banana-split":

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle = (\!| (i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\ \pi_1, \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle |\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle = (\!| \langle i \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, j \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle |\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (\!| i |\!) \cdot \mathsf{in} = i \cdot \mathsf{F}\ \pi_1 \cdot \mathsf{F}\ \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle \\ (\!| j |\!) \cdot \mathsf{in} = j \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \cdot \mathsf{F}\ \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (\!| i |\!) \cdot \mathsf{in} = i \cdot \mathsf{F}\ (\pi_1 \cdot \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle) \\ (\!| j |\!) \cdot \mathsf{in} = j \cdot \mathsf{F}\ (\pi_2 \cdot \langle (\!| i |\!), (\!| j |\!) \rangle) \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

2. Defina-se a função $\mathit{average} = \mathit{ratio} \cdot \langle \mathsf{sum}, \mathsf{length} \rangle$ para calcular a média de uma lista (não vazia), onde $\mathit{ratio}\ (n, d) = n\ /\ d$, para $d \neq 0$. Sabendo que sum e length são catamorfismos (recorde quais são os seus genes), recorra à lei "banana-split"para derivar

$$
\begin{array}{l}
\mathit{average}\ l = x\ /\ y\ \mathbf{where} \\
\quad (x, y) = \mathit{aux}\ l \\
\quad \mathit{aux}\ [\,] = (0, 0) \\
\quad \mathit{aux}\ (a : l) = (a + x, y + 1)\ \mathbf{where}\ (x, y) = \mathit{aux}\ l
\end{array}
$$

em Haskell.

3. Adapte o raciocínio do exercício 2 à derivação do programa que calcula a média dos valores guardados numa árvore de tipo LTree.

4. Um *bifunctor* B é um functor **binário**

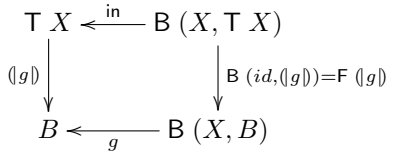
$$
\begin{array}{ccccc}
A & \cdots & C & \cdots & \mathsf{B}\ (A, C) \\
{\scriptstyle f} \downarrow & & {\scriptstyle g} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathsf{B}\ (f,g)} \\
D & \cdots & E & \cdots & \mathsf{B}\ (D, E)
\end{array}
\quad \text{tal que:} \quad
\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{B}\ (id, id) = id \\ \mathsf{B}\ (f \cdot g, h \cdot k) = \mathsf{B}\ (f, h) \cdot \mathsf{B}\ (g, k) \end{array} \right.
\qquad \text{(F1)}
$$

Mostre que $\mathsf{B}\ (X, Y) = X \times Y$, $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y$ e $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y \times Y$ são bifunctores.

5. O diagrama genérico de um catamorfismo de gene g sobre o *tipo paramétrico*

$$\mathsf{T}\ X \quad \cong \quad \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X)$$

cuja base é o bifunctor B, bem como a sua propriedade universal, são representados a seguir:



$$k = (\!|g|\!) \quad \equiv \quad k \cdot \mathsf{in} = g \cdot \underbrace{\mathsf{B}\ (id, k)}_{\mathsf{F}\ k}$$

Repare-se que se tem sempre $\mathsf{F}\ k = \mathsf{B}\ (id, k)$. Exemplos:

(a) Listas de elementos em A:

$$\mathsf{T}\ X = X^* \qquad \begin{cases} \mathsf{B}\ (X, Y) = 1 + X \times Y \\ \mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$$

Haskell: $[a]$

(b) Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T}\ X = \mathsf{LTree}\ X \qquad \begin{cases} \mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y^2 \\ \mathsf{B}\ (f, g) = f + g^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Leaf\ , Fork]$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

(c) "Rose trees":

$$\mathsf{T}\ X = \mathsf{Rose}\ X \qquad \begin{cases} \mathsf{B}\ (X, Y) = X \times Y^* \\ \mathsf{B}\ (f, g) = f \times g^* \end{cases} \qquad \mathsf{in} = Ros$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = Ros\ (a, [\mathsf{Rose}\ a])$

Partindo da definição *genérica* de map associado ao tipo T,

$$\mathsf{T}\ f \quad = \quad (\!|\mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, id)|\!)$$

dada no formulário, mostre que o map das listas (5a) é a função

$$f^*\ [\,] = [\,]$$
$$f^*\ (h : t) = f\ h : f^*\ t$$

e que o map das "rose trees" (5c) é a função

$$\mathsf{Rose}\ f\ (Ros\ (a, x)) = Ros\ (f\ a, (\mathsf{Rose}\ f)^*\ x)$$

6. Infira, desenhando o diagrama dos respectivos catamorfismos, o bifunctor de base B associado aos tipos paramétricos que a seguir se codificam em Haskell:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$$
$$\mathbf{data}\ NEList\ a = Sing\ a \mid Add\ (a, NEList\ a)$$