Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2017/18 - Ficha nr.° 13 (última)

1. Assim como a composição de funções se pode definir, com variáveis, por

$$(f \cdot g)\ a = \mathbf{let}\ b = g\ a\ \mathbf{in}\ f\ b$$

existe uma notação ao mesmo nível para definir a composição monádica (a chamada "notação-**do**"):

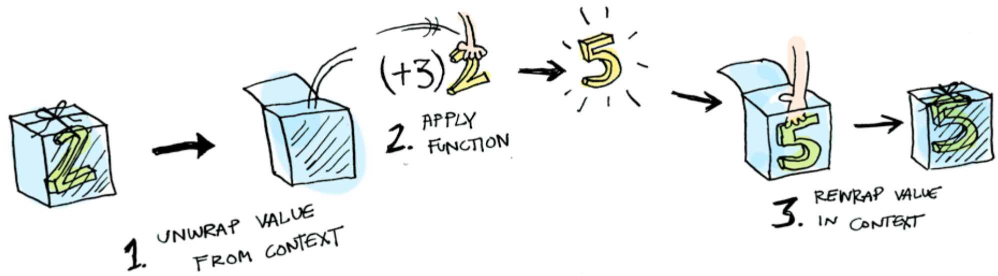
$$(f \bullet g)\ a = \mathbf{do}\ \{ b \leftarrow g\ a; f\ b \} \tag{F1}$$

Partindo de um facto demonstrado na ficha anterior, mostre que o functor $\mathsf{T}\ f$ se pode escrever

$$\mathsf{T}\ f\ x = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; \mathsf{return}\ (f\ a) \}$$

em notação-**do**, onde return é a notação habitual em Haskell para a unidade u do mónade em causa.

2. Na sequência da questão anterior, qual é a operação que o seguinte desenho animado[1] ilustra?



3. Recordando o combinador $\mathsf{for}\ b\ i = (\![\underline{i}\ , b]\!)$, seja definido o ciclo

$$k = (\![\underline{u\ i}\ , b \bullet id]\!) \tag{F2}$$

onde $b : A \to \mathsf{T}\ A$ para um dado mónade $A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$. Faça um diagrama para k e mostre que k é a função

$$k\ 0 = \mathsf{return}\ i$$
$$k\ (n+1) = \mathbf{do}\ \{ x \leftarrow k\ n; b\ x \}$$

Sugestão: use (F1) e outras leis que conhece do cálculo de mónades.

4. Suponha um tipo indutivo $\mathsf{T}\ X$ cuja base é o bifunctor

[1] Créditos: ver as ilustrações de http://adit.io/posts/2013-04-17-functors,_applicatives,_and_monads_in_pictures.html.

$$\begin{aligned} &\mathsf{B}\ (X, Y) = X + \mathsf{F}\ Y \\ &\mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{F}\ g \end{aligned}$$

onde F é um outro qualquer functor.

- Mostre que $\mathsf{T}\ X$ é um mónade em que

  $$\begin{aligned} \mu &= (\!|[id\ , \mathsf{in} \cdot i_2]|\!) \\ u &= \mathsf{in} \cdot i_1 \end{aligned}$$

  onde $\mathsf{in} : \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X) \to \mathsf{T}\ X$.
- Alguns mónades conhecidos, por exemplo LTree e Rose, resultam desta lei geral. Identifique F em cada caso.
- Para $\mathsf{F}\ Y = 1$ (e $\mathsf{F}\ f = id$) qual é o mónade que se obtém por esta regra? E no caso em que $\mathsf{F}\ Y = O \times Y^*$, onde o tipo O se considera fixado à partida?

5. Seja dada a função

$$\begin{aligned} &\mathsf{ap} : (C^B \times B) \to C \\ &\mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x \end{aligned}$$

onde, como sabe, $C^B = \{f \mid f : B \to C\}$. Mostre que a igualdade

$$\mathsf{ap} \cdot (curry\, f \times id) = f \tag{F3}$$

corresponde à definição $curry\, f\ \ a\ \ b = f\ \ (a, b)$ da função $curry$ que se analisou na primeira ficha desta disciplina.

6. Abreviando $curry\, f$ por $\overline{f}$, identifique a propriedade (F3) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação (identifique-a também no formulário), que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "ap"] & C \\ A \arrow[u, "k"] & A \times B \arrow[u, "k \times id"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad k = \overline{f} \ \equiv\ \mathsf{ap} \cdot (k \times id) = f$$

7. O mónade de estado, definido por $\mathsf{T}\ X = (S \times X)^S$ assumindo fixo um dado tipo de estados S, baseia-se no functor $\mathsf{F}\ X = X^S$ que é tal que $\mathsf{F}\ f = f^S = \overline{f \cdot \mathsf{ap}}$. Apresente justificações para a seguinte derivação da lei de *absorção* associada a esse functor:

$$\begin{aligned} & f^S \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g} \\ \equiv \quad & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g} \\ \equiv \quad & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \overline{f \cdot \mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times id)} = \overline{f \cdot g} \\ \equiv \quad & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \overline{f \cdot g} = \overline{f \cdot g} \\ \Box \quad & \end{aligned}$$

NB: identifique essa lei no formulário bem como outras de que vai precisar nas justificações.