Cálculo de Programas

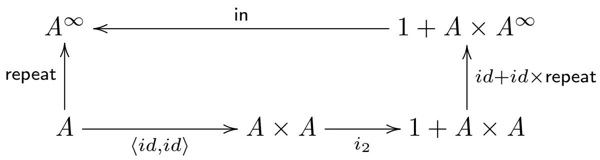
2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2017/18 - Ficha nr.° 10

1. O formulário desta disciplina apresenta duas definições alternativas para o functor $\mathsf{T}\ f$ de um tipo indutivo, uma como *catamorfismo* e outra como *anamorfismo*. Identifique-as e acrescente justificações à seguinte prova de que essas definições são equivalentes:

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{T}\ f = (\!|\ \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, id)\ |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{T}\ f \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, id) \cdot \mathsf{F}\ (\mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{T}\ f \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (id, \mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{B}\ (f, id) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{out} \cdot \mathsf{T}\ f = \mathsf{F}\ (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{B}\ (f, id) \cdot \mathsf{out} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{T}\ f = [\!(\ \mathsf{B}\ (f, id) \cdot \mathsf{out}\ )\!] \\
\Box &
\end{array}
$$

2. Mostre que o anamorfismo $\mathsf{repeat} = [\!(\ i_2 \cdot \langle id, id \rangle\ )\!]$ definido pelo diagrama



é a função:

$$\mathsf{repeat}\ a = a : \mathsf{repeat}\ a$$

Recorrendo às leis dos anamorfismos mostre que, apesar de não terminar[1], repeat satisfaz a propriedade:

$$\mathsf{map}\ f \cdot \mathsf{repeat} = \mathsf{repeat} \cdot f \qquad \text{(F1)}$$

("Verifique" este facto comparando, por exemplo, $(\mathsf{take}\ 10 \cdot \mathsf{map}\ \mathsf{succ} \cdot \mathsf{repeat})\ 1$ com $(\mathsf{take}\ 10 \cdot \mathsf{repeat} \cdot \mathsf{succ})\ 1$.)

[1] Por isso usamos, no diagrama, A^∞ em vez de A^*, para incluir também as listas infinitas.

3. Mostre que o catamorfismo de listas $\mathsf{length} = (\![\mathsf{zero}\ ,\mathsf{succ} \cdot \pi_2]\!)$ é a mesma função que o *anamorfismo* de naturais $[\!(\ (id + \pi_2) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{List}}\ )\!]$.

4. Mostre que a função mirror da ficha nr.º 7 se pode definir como o anamorfismo

$$\mathsf{mirror} = [\!(\ (id + \mathsf{swap}) \cdot \mathsf{out}\ )\!] \tag{F2}$$

onde out é a conversa de in. Volte a demonstrar a propriedade $\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id$, desta vez recorrendo à lei de fusão dos anamorfismos.

5. Considere a função $depth = (\![\mathsf{one}\ ,\mathsf{succ} \cdot umax]\!)$ que calcula a profundidade de árvores de tipo LTree, onde $umax\ (a, b) = max\ a\ b$.

Mostre, por absorção-cata, que a profundidade de uma árvore t não é alterada quando aplica uma função f a todas as suas folhas:

$$depth \cdot \mathsf{LTree}\ f = depth \tag{F3}$$

6. Numa página de STACK OVERFLOW[2] alguém respondeu afirmativamente à pergunta

Pode fazer-se unzip *num só passo?*

com a versão

$$\begin{array}{l} \mathsf{unzip}\ [\,] = ([\,], [\,]) \\ \mathsf{unzip}\ ((a, b) : xs) = (a : as, b : bs)\ \mathbf{where}\ (as, bs) = \mathsf{unzip}\ xs \end{array}$$

Ora o que essa página não faz é explicar como é que os dois passos de

$$\mathsf{unzip}\ xs = (\mathsf{map}\ \pi_1\ xs, \mathsf{map}\ \pi_2\ xs)$$

se fundem num só. Complete a derivação que se resume a seguir dessa evidência:

$$\begin{array}{cl}
& \mathsf{unzip}\ xs = (\mathsf{map}\ \pi_1\ xs, \mathsf{map}\ \pi_2\ xs) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{unzip} = \langle \mathsf{map}\ \pi_1, \mathsf{map}\ \pi_2 \rangle \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{unzip} = \langle (\!|\mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, id)|\!), (\!|\mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_2, id)|\!) \rangle \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{unzip} = (\!|\langle \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, id) \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_2, id) \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle|\!) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{unzip} = (\!|\langle \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, \pi_1), \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_2, \pi_2) \rangle|\!) \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{unzip} \cdot \mathsf{in} = \langle [\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)], [\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons} \cdot (\pi_2 \times \pi_2)] \rangle \cdot (id + id \times \mathsf{unzip}) \\
\equiv & \{\ \text{... alguns passos mais ...}\ \} \\
& \ldots. \\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{unzip}\ [\,] = ([\,], [\,]) \\ \mathsf{unzip}\ ((a, b) : xs) = ((a : as), (b : bs))\ \mathbf{where}\ (as, bs) = \mathsf{unzip}\ xs \end{array} \right.
\end{array}$$

[2] Cf. https://stackoverflow.com/questions/18287848/unzip-in-one-pass.