Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2017/18 - Ficha nr.° 8

1. Apresente justificações para a seguinte demonstração da lei de "banana-split":

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle = \llparenthesis (i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\ \pi_1, \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle \rrparenthesis \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle = \llparenthesis \langle i \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, j \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle \rrparenthesis \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \llparenthesis i \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = i \cdot \mathsf{F}\ \pi_1 \cdot \mathsf{F}\ \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle \\ \llparenthesis j \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = j \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \cdot \mathsf{F}\ \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \llparenthesis i \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = i \cdot \mathsf{F}\ (\pi_1 \cdot \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle) \\ \llparenthesis j \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = j \cdot \mathsf{F}\ (\pi_2 \cdot \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle) \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

2. Defina-se a função $\mathit{average} = \mathit{ratio} \cdot \langle \mathsf{sum}, \mathsf{length} \rangle$ para calcular a média de uma lista (não vazia), onde $\mathit{ratio}\ (n, d) = n\ /\ d$, para $d \neq 0$. Sabendo que sum e length são catamorfismos (recorde quais são os seus genes), recorra à lei "banana-split"para derivar

$$
\begin{array}{l}
\mathit{average}\ l = x\ /\ y\ \mathbf{where} \\
\quad (x, y) = \mathit{aux}\ l \\
\quad \mathit{aux}\ [\,] = (0, 0) \\
\quad \mathit{aux}\ (a : l) = (a + x, y + 1)\ \mathbf{where}\ (x, y) = \mathit{aux}\ l
\end{array}
$$

em Haskell.

3. Adapte o raciocínio do exercício 2 à derivação do programa que calcula a média dos valores guardados numa árvore de tipo LTree.

4. Um *bifunctor* B é um functor **binário**

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, "g"'] & \mathsf{B}\ (A, C) \arrow[d, "\mathsf{B}\ (f, g)"] \\
B \arrow[r, dash, dotted] & D \arrow[r, dash, dotted] & \mathsf{B}\ (B, D)
\end{tikzcd}
\quad \text{tal que:} \quad
\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{B}\ (id, id) = id \\ \mathsf{B}\ (f \cdot g, h \cdot k) = \mathsf{B}\ (f, h) \cdot \mathsf{B}\ (g, k) \end{array} \right.
\qquad \text{(F1)}
$$

Mostre que $\mathsf{B}\ (X, Y) = X \times Y$, $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y$ e $\mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y \times Y$ são bifunctores.

5. O diagrama genérico de um catamorfismo de gene g sobre o *tipo paramétrico*

$$\mathsf{T}\ X \quad\cong\quad \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X)$$

cuja base é o bifunctor B, bem como a sua propriedade universal, são representados a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}\ X \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X) \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{B}\ (id, (\!|g|\!)) = \mathsf{F}\ (\!|g|\!)"] \\
B & \mathsf{B}\ (X, B) \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad
k = (\!|g|\!) \quad\equiv\quad k \cdot \mathsf{in} = g \cdot \underbrace{\mathsf{B}\ (id, k)}_{\mathsf{F}\ k}$$

Repare-se que se tem sempre $\mathsf{F}\ k = \mathsf{B}\ (id, k)$. Exemplos:

(a) Listas de elementos em A:

$\mathsf{T}\ X = X^*$ $\quad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = 1 + X \times Y \\ \mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g \end{array}\right.$ $\quad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$

Haskell: $[\,a\,]$

(b) Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$\mathsf{T}\ X = \mathsf{LTree}\ X$ $\quad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = X + Y^2 \\ \mathsf{B}\ (f, g) = f + g^2 \end{array}\right.$ $\quad \mathsf{in} = [\mathit{Leaf}\ , \mathit{Fork}]$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathit{Leaf}\ a \mid \mathit{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

(c) "Rose trees":

$\mathsf{T}\ X = \mathsf{Rose}\ X$ $\quad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = X \times Y^* \\ \mathsf{B}\ (f, g) = f \times g^* \end{array}\right.$ $\quad \mathsf{in} = \mathit{Ros}$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = \mathit{Ros}\ (a, [\mathsf{Rose}\ a])$

Partindo da definição *genérica* de map associado ao tipo T,

$$\mathsf{T}\ f \quad=\quad (\!|\mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, id)|\!)$$

dada no formulário, mostre que o map das listas (5a) é a função

$$\begin{array}{l} f^*\ [\,] = [\,] \\ f^*\ (h : t) = f\ h : f^*\ t \end{array}$$

e que o map das "rose trees" (5c) é a função

$$\mathsf{Rose}\ f\ (\mathit{Ros}\ (a, x)) = \mathit{Ros}\ (f\ a, (\mathsf{Rose}\ f)^*\ x)$$

6. Infira, desenhando o diagrama dos respectivos catamorfismos, o bifunctor de base B associado aos tipos paramétricos que a seguir se codificam em Haskell:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = \mathit{Empty} \mid \mathit{Node}\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$$
$$\mathbf{data}\ \mathit{NEList}\ a = \mathit{Sing}\ a \mid \mathit{Add}\ (a, \mathit{NEList}\ a)$$