Cálculo de Programas

2.° ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática

UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.° 8

1. As seguintes funções mutuamente recursivas testam a paridade de um número:

$$\begin{cases} \mathit{impar}\ 0 = \mathsf{False} \\ \mathit{impar}\ (n+1) = \mathit{par}\ n \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathit{par}\ 0 = \mathsf{True} \\ \mathit{par}\ (n+1) = \mathit{impar}\ n \end{cases}$$

   Mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} \mathit{impar} \cdot \mathsf{in} = h \cdot (\mathit{id} + \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle) \\ \mathit{par} \cdot \mathsf{in} = k \cdot (\mathit{id} + \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle) \end{cases}$$

   para um dado h e k (deduza-os). De seguida, recorra às leis da recursividade múltipla e da troca para mostrar que

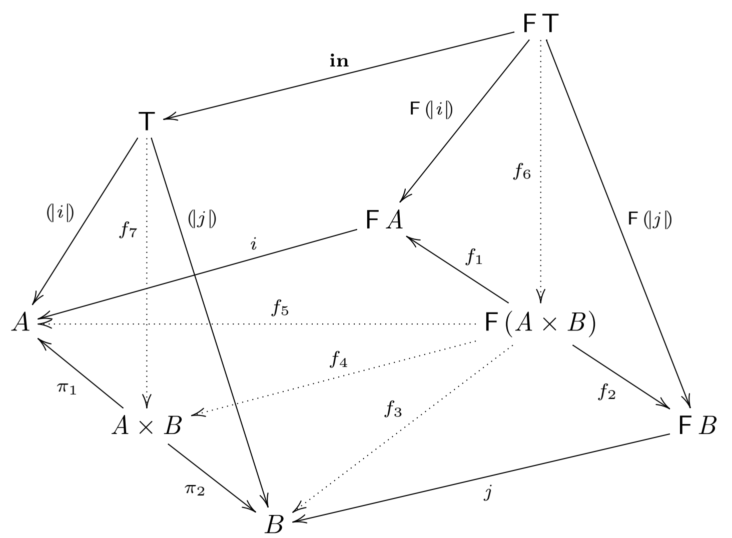
$$\mathit{imparpar} = \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle = \mathsf{for\ swap}\ (\mathsf{False}, \mathsf{True})$$

2. Atente no diagrama da lei de "banana-split"

$$\langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle = (\!|(i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\,\pi_1, \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle|\!) \qquad \text{(F1)}$$

   que abaixo se apresenta (identifique-a no formulário), onde T é um tipo indutivo genérico definido sobre o functor F.

   - Identifique as funções f_1, f_2, ... f_6 que encaixam no diagrama.
   - Há duas maneiras de escrever f_7: identifique-as e deduza assim a lei (F1) a partir da sua igualdade.



3. Defina-se a função $\mathit{average} = \mathit{ratio} \cdot \langle \mathsf{sum}, \mathsf{length} \rangle$ para calcular a média de uma lista não vazia, onde $\mathit{ratio}\ (n, d) = n \mathbin{/} d$, para $d \neq 0$. Sabendo que sum e length são catamorfismos (recorde quais são os seus genes), recorra à lei "banana-split"para derivar

$$
\begin{array}{l}
average\ l = x \mathbin{/} y\ \mathbf{where} \\
\quad (x, y) = aux\ l \\
\quad aux\ [\,] = (0, 0) \\
\quad aux\ (a : l) = (a + x, y + 1)\ \mathbf{where}\ (x, y) = aux\ l
\end{array}
$$

em Haskell.

4. Considere o par de funções mutuamente recursivas

$$
\left\{ \begin{array}{l} f_1\ [\,] = [\,] \\ f_1\ (h : t) = h : (f_2\ t) \end{array} \right.
\qquad\qquad
\left\{ \begin{array}{l} f_2\ [\,] = [\,] \\ f_2\ (h : t) = f_1\ t \end{array} \right.
$$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle f_1, f_2 \rangle$ como um catamorfismo de listas e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções f_1 e f_2?

5. Adapte o raciocínio do exercício 3 à derivação do programa que calcula a média dos valores guardados numa árvore de tipo LTree.

6. O diagrama que se segue representa a lei genérica para fusão de catamorfismos (identifique-a no formulário)

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T} \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & \mathsf{F}\,\mathsf{T} \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\,(\!|g|\!)"] \\
A \arrow[d, "f"'] & \mathsf{F}\,A \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\mathsf{F}\,f"] \\
B & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}
\qquad
f \cdot (\!|g|\!) = (\!|h|\!) \ \Leftarrow\ f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f
$$

Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$
\begin{array}{cl}
 & f \cdot (\!|g|\!) = (\!|h|\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f \cdot (\!|g|\!) \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\,(f \cdot (\!|g|\!)) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f \cdot (\!|g|\!) \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\,f \cdot \mathsf{F}\,(\!|g|\!) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f \cdot g \cdot \mathsf{F}\,(\!|g|\!) = h \cdot \mathsf{F}\,f \cdot \mathsf{F}\,(\!|g|\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f
\end{array}
$$

7. Recorra à lei de fusão deduzida na questão 6 para demonstrar a propriedade:

$$
f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{F2}
$$

8. Mostre, recorrendo à lei de recursividade múltipla, que a função factorial pode ser implementada como um ciclo-for:

$$
fac = \pi_2 \cdot aux\ \mathbf{where}\ aux = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle\ (1, 1)
$$