Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.° 7

1. Considere o seguinte inventário de tipos indutivos de dados:

   (a) Números naturais:
   $\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$
   Haskell: Int inclui $\mathbb{N}_0$.

   (b) Listas de elementos em A:
   $\mathsf{T} = A^* \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$
   Haskell: $[\,a\,]$

   (c) Árvores com informação de tipo A nos nós:
   $\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}\ , Node]$
   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$

   (d) Árvores com informação de tipo A nas folhas:
   $\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Leaf\ , Fork]$
   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$

   (e) Árvores com informação nos nós e nas folhas:
   $\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Unit\ , Comp]$
   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$

   (f) Árvores de expressão:
   $\mathsf{T} = \mathsf{Expr}\ V\ O \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = V + O \times X^* \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times \mathsf{map}\ f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Var\ , Op]$
   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{Expr}\ v\ o = Var\ v \mid Op\ (o, [\mathsf{Expr}\ v\ o])$

   Defina o gene g para cada um dos catamorfismos seguintes desenhando, para cada caso, o diagrama correspondente:

   - $positivos = (\!|g|\!)$ — retira de uma lista de inteiros (1b) todos os números negativos
   - $concat = (\!|g|\!)$ — concatena uma lista de listas numa só lista (1b)
   - $zeros = (\!|g|\!)$ — substitui todas as folhas de uma árvore de tipo (1d) por zero.
   - $conta = (\!|g|\!)$ — conta o número de nós de uma árvore de tipo (1c).
   - $mirror = (\!|g|\!)$ — espelha uma árvore de tipo (1d), i.e., roda-a de 180º.
   - $converte = (\!|g|\!)$ — converte árvores de tipo (1e) em árvores de tipo (1c) eliminando os Bs que estão na primeira.

- $vars = (|g|)$ — lista as variáveis de uma árvore expressão de tipo (1f).

2. Converta a função $vars$ do exercício 1 numa função com variáveis em Haskell sem quaisquer combinadores *pointfree*.

3. A função seguinte, em Haskell

$$
\begin{array}{l}
sumprod\ a\ [\,] = 0 \\
sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t
\end{array}
$$

é o catamorfismo de listas

$$sumprod\ a \quad = \quad (|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]|) \tag{F1}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$.

Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, que

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{F2}$$

onde $\mathsf{sum} = (|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]|)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

4. Recordando o isomorfismo

$$\mathsf{undistl} = [i_1 \times id\ , i_2 \times id] \tag{F3}$$

e o seu inverso distl cuja propriedade natural é

$$(f \times h + g \times h) \cdot \mathsf{distl} = \mathsf{distl} \cdot ((f + g) \times h) \tag{F4}$$

mostre que o catamorfismo de listas $f = (|[\mathsf{nil}\ , [\pi_2\ , \mathsf{cons}] \cdot \mathsf{distl}]|)$ é a função

$$
\begin{array}{l}
f\ [\,] = [\,] \\
f\ ((i_1\ a) : t) = f\ t \\
f\ ((i_2\ b) : t) = b : f\ t
\end{array}
$$

que selecciona todos os Bs que ocorrem numa lista de As ou Bs.

5. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$
\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{array} \right.
$$

Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{G}\ X \times \mathsf{F}\ X$$

6. Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ e $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ que a seguir se definem:

$$
\begin{array}{l}
(\mathsf{F} + \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) + (\mathsf{G}\ X) \\
(\mathsf{F} \times \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) \times (\mathsf{G}\ X)
\end{array}
$$

7. Considere o functor

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{T}\ X = X \times X \\
\mathsf{T}\ f = f \times f
\end{array}
$$

e as funções $\mu = \pi_1 \times \pi_2$ e $u = \langle id, id \rangle$. Mostre que a propriedade $\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id = \mu \cdot u$ se verifica.