Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.° 6

1. O combinador

$$\begin{array}{l} \mathit{flip} :: (a \to b \to c) \to b \to a \to c \\ \mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x \end{array}$$

troca a ordem dos argumentos de uma função. É fácil de ver que *flip* é um isomorfismo de exponenciais:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A\times B} & \cong & C^{B\times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}\cdot \mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f}\cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

Apresente justificações para os passos seguintes do cálculo desse isomorfismo a partir da sua definição ao ponto (*pointwise*):

$$\begin{array}{cl} & \mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap}\ (\mathit{flip}\ f\ x, y) = \mathsf{ap}\ (f\ y, x) \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (\mathsf{ap}\cdot(\mathit{flip}\ f\times id))\ (x,y) = (\mathsf{ap}\cdot(f\times id))\ (y,x) \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap}\cdot(\mathit{flip}\ f\times id) = \mathsf{ap}\cdot(f\times id)\cdot\mathsf{swap} \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap}\cdot(f\times id)\cdot\mathsf{swap}} \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap}\cdot(\overline{\widehat{f}}\times id)\cdot\mathsf{swap}} \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f}\cdot\mathsf{swap}} \end{array}$$

2. A função $A\times B \xrightarrow{\pi_2} B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão "curried" $A \xrightarrow{\overline{\pi_2}} B^B$. Usando as leis da exponenciação mostre que, qualquer que seja f,

$$\overline{\pi_2}\cdot f = \overline{\pi_2}$$

Logo $\overline{\pi_2}$ é uma função constante. Consegue identificar qual? Justifique informalmente.

3. Inferir o tipo de $\alpha = [\overline{i_1}\ ,\overline{i_2}]$ desenhando-o num diagrama. $\widehat{\alpha}$ é um isomorfismo conhecido: qual? Identifique-o através do seu tipo.

4. Os diagramas seguintes representam as **propriedades universais** que definem o combinador **catamorfismo** para dois tipos de dados — números naturais $\mathbb{N}_0$ à esquerda e listas finitas A^* à direita:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + \llparenthesis g \rrparenthesis"] \\ B & 1 + B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & 1 + A \times A^* \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + id \times \llparenthesis g \rrparenthesis"] \\ B & 1 + A \times B \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

$$\mathsf{in} = [\mathsf{zero}\ ,\mathsf{succ}] \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons}]$$

$$\mathsf{zero}\ \_ = 0 \qquad \mathsf{nil}\ \_ = [\,]$$

$$\mathsf{succ}\ n = n + 1 \qquad \mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$$

$$k = \llparenthesis g \rrparenthesis \ \equiv\ k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + k) \qquad k = \llparenthesis g \rrparenthesis \ \equiv\ k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + id \times k)$$

$$\mathsf{for}\ b\ i = \llparenthesis [\underline{i}\ , b] \rrparenthesis \qquad foldr\ f\ \ u = \llparenthesis [\underline{u}\ , \widehat{f}] \rrparenthesis$$

onde $\widehat{f}$ abrevia $\mathsf{uncurry} f$.

(a) Use a propriedade universal da esquerda para demonstrar a lei de reflexão $\mathsf{for}\ \mathsf{succ}\ 0 = id$ e a propriedade $\mathsf{for}\ \mathsf{succ}\ 1 = \mathsf{succ}$.

(b) Usando agora a propriedade universal da direita, mostre que $\llparenthesis [\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons}] \rrparenthesis = id$.

(c) Mostre que as funções

$$f = \mathsf{for}\ id\ i$$

e

$$g = \mathsf{for}\ \underline{i}\ i$$

são a mesma função. (Qual?)

5. Identifique como catamorfismos de listas as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso:

- k é a função que multiplica todos os elementos de uma lista
- $k = reverse$
- k é a função $\mathsf{map}\ f$, para um dado $f : A \to B$.

6. A função $k = \mathsf{for}\ f\ i$ pode ser codificada em sintaxe C escrevendo

```
int k(int n) {
  int r=i;
  int j;
  for (j=1;j<n+1;j++) {r=f(r);}
  return r;
};
```

Escreva em C as funções f e g da alínea 4c acima, bem como aquela que decorre da lei de reflexão da alínea 4a.