Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.° 5

1. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g\rangle \ , \langle h, k\rangle] = \langle [f \ , h], [g \ , k]\rangle$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrd, "g"] & A+B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "k"] \arrow[lld, "h"'] \\ C & C\times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D \end{tikzcd}$$

Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

2. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id \ , i_2 \times id]$ sob a forma de um 'split' de alternativas.

3. Considere o seguinte diagrama explicativo da noção de *guarda* ($p?$) de um dado predicado p, onde α é um isomorfismo que conhece das aulas teóricas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle p, id\rangle"] \arrow[rr, bend right, "p?"'] & 2\times A \arrow[r, "\alpha"] & A+A \end{tikzcd} \tag{F1}$$

Derive (usando um diagrama) a propriedade *natural* (i.e. "grátis") do isomorfismo α, de que vai precisar para deduzir uma propriedade importante que consta do formulário da disciplina, $p\ ? \cdot f = (f+f)\cdot(p\cdot f)?$ — identifique-a. Complete então as justificações do respectivo cálculo:

$$\begin{array}{cl} & p\ ? \cdot f \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \alpha \cdot \langle p \cdot f, f\rangle \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \alpha \cdot (id \times f) \cdot \langle p \cdot f, id\rangle \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (f+f) \cdot \alpha \cdot \langle p \cdot f, id\rangle \\ = & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (f+f)\cdot(p\cdot f)? \end{array}$$

4. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k \;=\; k \tag{F2}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \;=\; (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F3}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{F4}$$
$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{F5}$$
$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) \;=\; p \rightarrow a, d \tag{F6}$$

5. O combinador

$\mathsf{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a$
$\mathsf{const}\ a\ b = a$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Sabendo as seguintes proprieades deste combinador,

$$\underline{k} \cdot g \;=\; \underline{k}$$
$$f \cdot \underline{k} \;=\; \underline{f\ k}$$

(identifique-as no formulário) demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} \;=\; \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F7}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.

6. Considere a função $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{in}=[\underline{0}\ ,\mathsf{succ}]"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathsf{succ}"] \\
& \mathbb{N}_0 &
\end{tikzcd} \tag{F8}$$

onde $\mathsf{succ}\ n = n + 1$. Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo $()$ em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por $()$, calcule a inversa de in,

$\mathsf{out}\ 0 = i_1\ ()$
$\mathsf{out}\ (n + 1) = i_2\ n$

resolvendo em ordem a out a equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ e introduzindo variáveis. (NB: poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

7. Mostre que a função $\mathsf{for}\ b\ i$, onde

$\mathsf{for}\ b\ i\ 0 = i$
$\mathsf{for}\ b\ i\ (n + 1) = b\ (\mathsf{for}\ b\ i\ n)$

é solução da equação seguinte, em x

$$x \cdot \mathsf{in} = [\underline{i}\ , b] \cdot (id + x) \tag{F9}$$

onde $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$, $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.

8. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.