

Cálculo de Programas

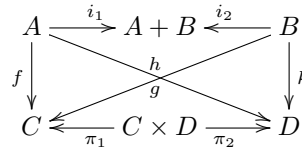
2.º ano

Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.º 5

1. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$\langle \langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle \rangle = \langle [f, h], [g, k] \rangle$$



Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

2. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\text{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$ sob a forma de um ‘split’ de alternativas.
3. Considere o seguinte diagrama explicativo da noção de *guarda* ($p?$) de um dado predicado p , onde α é um isomorfismo que conhece das aulas teóricas:

$$A \xrightarrow{\langle p, id \rangle} 2 \times A \xrightarrow{\alpha} A + A \quad (F1)$$

$\xrightarrow{p?}$

Derive (usando um diagrama) a propriedade *natural* (i.e. ”grátis”) do isomorfismo α , de que vai precisar para deduzir uma propriedade importante que consta do formulário da disciplina, $p? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)?$ — identifique-a. Complete então as justificações do respectivo cálculo:

$$\begin{aligned}
 & p? \cdot f \\
 = & \{ \dots \} \\
 & \alpha \cdot \langle p \cdot f, f \rangle \\
 = & \{ \dots \} \\
 & \alpha \cdot (id \times f) \cdot \langle p \cdot f, id \rangle \\
 = & \{ \dots \} \\
 & (f + f) \cdot \alpha \cdot \langle p \cdot f, id \rangle \\
 = & \{ \dots \} \\
 & (f + f) \cdot (p \cdot f)?
 \end{aligned}$$

4. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k = k \tag{F2}$$

$$(p? + p?) \cdot p? = (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{F3}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{F4}$$

$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{F5}$$

$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) = p \rightarrow a, d \tag{F6}$$

5. O combinador

$$\begin{aligned} \text{const} &:: a \rightarrow b \rightarrow a \\ \text{const } a \ b &= a \end{aligned}$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\text{const } k$ por \underline{k} , qualquer que seja k . Sabendo as seguintes propriedades deste combinador,

$$\begin{aligned} \underline{k} \cdot g &= \underline{k} \\ f \cdot \underline{k} &= \underline{f \ k} \end{aligned}$$

(identifique-as no formulário) demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F7}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.

6. Considere a função $\text{in} = [\underline{0}, \text{succ}]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{i_1} & 1 + \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{i_2} & \mathbb{N}_0 \\ & \searrow \underline{0} & \downarrow \text{in} = [\underline{0}, \text{succ}] & \swarrow \text{succ} & \\ & & \mathbb{N}_0 & & \end{array} \tag{F8}$$

onde $\text{succ } n = n + 1$. Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo () em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por (), calcule a inversa de in,

$$\begin{aligned} \text{out } 0 &= i_1 () \\ \text{out } (n + 1) &= i_2 n \end{aligned}$$

resolvendo em ordem a out a equação $\text{out} \cdot \text{in} = \text{id}$ e introduzindo variáveis. (NB: poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

7. Mostre que a função for $b \ i$, onde

$$\begin{aligned} \text{for } b \ i \ 0 &= i \\ \text{for } b \ i \ (n + 1) &= b \ (\text{for } b \ i \ n) \end{aligned}$$

é solução da equação seguinte, em x

$$x \cdot \text{in} = [\underline{i}, b] \cdot (\text{id} + x) \tag{F9}$$

onde $\text{in} = [\underline{0}, \text{succ}]$, $\text{succ } n = n + 1$.

8. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = \text{id}$ e $\nabla \cdot i_2 = \text{id}$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.