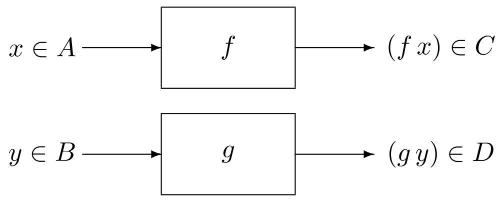
Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2016/17 - Ficha nr.° 2

1. Seja dada a função $\mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$. Faça um diagrama que explique o tipo de swap e mostre, usando o cálculo de programas, que $\mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} = id$, onde id é a função identidade.

2. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{1}$$

que capta a aplicação *paralela* e *independente* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$.

(a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

(b) Sem recorrer à alínea anterior, demonstre as igualdades

$$id \times id = id$$
$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$$
$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$$

3. Suponha que tem uma relação $db_1 \in (Dat \times Jog^*)^*$ de todos os jogos que se efectuaram numa dada competição, organizados por data. Seja ainda $db_2 \in (Jog \times Atl^*)^*$ a relação, para cada jogo, dos atletas que nele participaram.

Um comentador desportivo pede-lhe que derive de db_1 e de db_2 a relação, ordenada por nome, das datas em que cada atleta jogou, datas essas também ordenadas:

$$f : (Dat \times Jog^*)^* \to (Jog \times Atl^*)^* \to (Atl \times Dat^*)^*$$
$$f\ db_1\ db_2 = \ldots$$

Mostre que f pode ser escrita numa só linha usando os combinadores $f \cdot g$, $f \times g$, etc que até agora estudou, desde que tenha à sua disposição a seguinte biblioteca de funções **genéricas**:

- $sort : A^* \to A^*$
  — ordena listas de A segundo uma ordem previamente assumida

- $\mathit{collect} : (A \times B)^* \to (A \times B^*)^*$
  — agrupa uma sequência de pares segundo os respectivos primeiros elementos, e.g.
  $\mathit{collect}\ [(1,2),(5,6),(1,3)] = [(1,[2,3]),(5,[6])]$
- $\mathit{discollect} : (A \times B^*)^* \to (A \times B)^*$
  — inversa da anterior
- $\mathit{converse} : (A \times B)^* \to (B \times A)^*$
  — troca os elementos de cada par entre si
- $\mathit{comp} : (A \times B)^* \to (B \times C)^* \to (A \times C)^*$
  — encadeia as sequências de entrada de acordo com os elementos em comum (de tipo B).

4. Recorde as propriedades universais dos combinadores $\langle f, g\rangle$ e $[f\ , g]$,

$$k = \langle f, g\rangle \quad\equiv\quad \left\{\begin{array}{l}\pi_1 \cdot k = f\\ \pi_2 \cdot k = g\end{array}\right.$$

$$k = [f\ , g] \quad\equiv\quad \left\{\begin{array}{l}k \cdot i_1 = f\\ k \cdot i_2 = g\end{array}\right.$$

das quais, como sabe, podem ser derivadas todas as outras que aparecem no respectivo grupo, no formulário.

(a) Use a segunda para demonstrar a lei $[i_1\ , i_2] = id$ conhecida por *Reflexão*-$+$.

(b) Use a primeira para demonstrar a lei

$$\langle f, g\rangle = \langle h, k\rangle \quad\equiv\quad \left\{\begin{array}{l}f = h\\ g = k\end{array}\right.$$

que também consta desse formulário sob a designação *Eq*-$\times$.

5. Uma função diz-se *constante* sempre que o seu resultado é o mesmo, qualquer que seja o argumento. Por isso se designa uma tal função sublinhando o valor do seu resultado: se este for k, por exemplo, ter-se-á a função $\underline{k} :: a \to b$, para k um valor de b, que satisfaz sempre a propriedade

$$\underline{k} \cdot f \quad=\quad \underline{k}$$

qualquer que seja k e f.[1]

Mostre que $[\underline{k}\ , \underline{k}] = \underline{k}$ aplicando a segunda lei universal dada acima.

6. O combinador funcional *soma* define-se por:

$$f + g = [i_1 \cdot f\ , i_2 \cdot g] \tag{2}$$

Identifique os nomes das seguintes propriedades

$$id + id = id$$
$$(f + g) \cdot i_1 = i_1 \cdot f$$
$$(f + g) \cdot i_2 = i_2 \cdot g$$

no **formulário** da disciplina e demonstre-as usando o cálculo de programas.

7. Repita a questão 1 para a função $\mathsf{coswap} = [i_2\ , i_1]$.

[1] A função $\underline{k}$ escreve-se `const k` em Haskell.