

Leis do Cálculo Funcional (2014/15)

FUNÇÕES

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(1)
Assoc-comp	$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$	(2)
Natural-const	$\underline{k} \cdot f = \underline{k}$	(3)
Fusão-const	$f \cdot \underline{k} = \underline{f \cdot k}$	(4)
Leibniz	$f \cdot h = g \cdot h \Leftrightarrow f = g$	(5)

PRODUTO

Universal-\times	$k = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(6)
Cancelamento-\times	$\begin{cases} \pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \\ \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g \end{cases}$	(7)
Reflexão-\times	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{A \times B}$	(8)
Fusão-\times	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(9)
Absorção-\times	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(10)
Def-\times	$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$	(11)
Natural-π_1	$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$	(12)
Natural-π_2	$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$	(13)
Functor-\times	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) = (g \times i) \cdot (h \times j)$	(14)
Functor-id-\times	$id_A \times id_B = id_{A \times B}$	(15)
Eq-\times	$\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} f = h \\ g = k \end{cases}$	(16)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f, g] \Leftrightarrow \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$	(17)
Cancelamento-$+$	$\begin{cases} [f, g] \cdot i_1 = f \\ [f, g] \cdot i_2 = g \end{cases}$	(18)
Reflexão-$+$	$[i_1, i_2] = id_{A+B}$	(19)
Fusão-$+$	$f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(20)
Absorção-$+$	$[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(21)
Def-$+$	$f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$	(22)
Natural-i_1	$(i + j) \cdot i_1 = i_1 \cdot i$	(23)
Natural-i_2	$(i + j) \cdot i_2 = i_2 \cdot j$	(24)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(25)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(26)
Eq-$+$	$[f, g] = [h, k] \Leftrightarrow \begin{cases} f = h \\ g = k \end{cases}$	(27)

MISC. PRODUTO / COPRODUTO

$$\text{Lei da troca} \quad \langle \langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle \rangle = \langle \langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle \rangle \quad (28)$$

EXPONENCIAÇÃO

$$\text{Universal-exp} \quad k = \bar{f} \Leftrightarrow f = ap \cdot (k \times id) \quad (29)$$

$$\text{Cancelamento-exp} \quad f = ap \cdot (\bar{f} \times id) \quad (30)$$

$$\text{Reflexão-exp} \quad \overline{ap} = id_{B^A} \quad (31)$$

$$\text{Fusão-exp} \quad \overline{g \cdot (f \times id)} = \bar{g} \cdot f \quad (32)$$

$$\text{Absorção-exp} \quad f^A \cdot \bar{g} = \bar{f} \cdot g \quad (33)$$

$$\text{Def-exp} \quad f^A = \overline{f \cdot ap} \quad (34)$$

$$\text{Functor-exp} \quad (g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A \quad (35)$$

$$\text{Functor-id-exp} \quad id^A = id \quad (36)$$

INDUÇÃO

$$\text{Universal-cata} \quad k = \langle \!| g \!| \rangle \Leftrightarrow k \cdot in = g \cdot F k \quad (37)$$

$$\text{Cancelamento-cata} \quad \langle \!| g \!| \rangle \cdot in = g \cdot F \langle \!| g \!| \rangle \quad (38)$$

$$\text{Reflexão-cata} \quad \langle \!| in \!| \rangle = id_{\top} \quad (39)$$

$$\text{Fusão-cata} \quad f \cdot \langle \!| g \!| \rangle = \langle \!| h \!| \rangle \Leftarrow f \cdot g = h \cdot F f \quad (40)$$

$$\text{Absorção-cata} \quad \langle \!| g \!| \rangle \cdot \top f = \langle \!| g \cdot B(f, id) \!| \rangle \quad (41)$$

$$\text{Def-map} \quad \top f = \langle \!| in_{\mathbb{F}} \cdot B(f, id) \!| \rangle \quad (42)$$

RECURSIVIDADE MÚTUA

$$\text{Fokkinga} \quad \begin{cases} f \cdot in = h \cdot F \langle \!| f, g \!| \rangle \\ g \cdot in = k \cdot F \langle \!| f, g \!| \rangle \end{cases} \equiv \langle \!| f, g \!| \rangle = \langle \!| \langle h, k \rangle \!| \rangle \quad (43)$$

$$\text{“Banana-split”} \quad \langle \!| \langle i \rangle, \langle \!| j \!| \rangle \!| \rangle = \langle \!| (i \times j) \cdot \langle \!| F \pi_1, F \pi_2 \!| \rangle \!| \rangle \quad (44)$$

COINDUÇÃO

$$\text{Universal-ana} \quad k = \llbracket \!| g \!| \rrbracket \Leftrightarrow out \cdot k = (F k) \cdot g \quad (45)$$

$$\text{Cancelamento-ana} \quad out \cdot \llbracket \!| g \!| \rrbracket = F \llbracket \!| g \!| \rrbracket \cdot g \quad (46)$$

$$\text{Reflexão-ana} \quad \llbracket \!| out \!| \rrbracket = id_{\top} \quad (47)$$

$$\text{Fusão-ana} \quad \llbracket \!| g \!| \rrbracket \cdot f = \llbracket \!| h \!| \rrbracket \Leftarrow g \cdot f = (F f) \cdot h \quad (48)$$

$$\text{Absorção-ana} \quad \top f \cdot \llbracket \!| g \!| \rrbracket = \llbracket \!| B(f, id) \cdot g \!| \rrbracket \quad (49)$$

$$\text{Def-map} \quad \top f = \llbracket \!| B(f, id) \cdot out_{\mathbb{F}} \!| \rrbracket \quad (50)$$

FUNCTORES

$$\text{Functor-F} \quad F(g \cdot h) = (F g) \cdot (F h) \quad (51)$$

$$\text{Functor-id-F} \quad F id_A = id_{(F A)} \quad (52)$$

CONDICIONAL

Natural-guarda	$p? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)?$	(53)
Def condicional de McCarthy	$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$	(54)
1.ª Lei de fusão do condicional	$f \cdot (p \rightarrow g, h) = p \rightarrow f \cdot g, f \cdot h$	(55)
2.ª Lei de fusão do condicional	$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$	(56)

MÓNADAS

Multiplicação	$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \top \mu$	(57)
Unidade	$\mu \cdot u = \mu \cdot \top u = id$	(58)
Natural-u	$u \cdot f = \top f \cdot u$	(59)
Natural-μ	$\mu \cdot \top (\top f) = \top f \cdot \mu$	(60)
Composição monádica	$f \bullet g = \mu \cdot \top f \cdot g$	(61)
Associatividade-\bullet	$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h$	(62)
Identidade-\bullet	$u \bullet f = f = f \bullet u$	(63)
Associatividade-\bullet/\cdot	$(f \bullet g) \cdot h = f \bullet (g \cdot h)$	(64)
Associatividade-\cdot/\bullet	$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\top g \cdot h)$	(65)
μ versus \bullet	$id \bullet id = \mu$	(66)
‘μ as binding’	$\mu x = x \gg= id$	(67)
‘Binding as μ’	$x \gg= f = (\mu \cdot \top f)x$	(68)
Sequenciação	$x \gg y = x \gg= \underline{y}$	(69)
Notação-do	$do \{ x \leftarrow a; b \} = a \gg= (\lambda x \rightarrow b)$	(70)

DEFINIÇÕES ao ponto

Igualdade extensional	$f = g \Leftrightarrow \langle \forall x :: f x = g x \rangle$	(71)
Def-comp	$(f \cdot g) x = f (g x)$	(72)
Def-id	$id x = x$	(73)
Def-const	$\underline{k} x = k$	(74)
Notação-λ	$f a = b \equiv f = \lambda a \rightarrow b$	(75)
Def-split	$\langle f, g \rangle x = (f x, g x)$	(76)
Def-\times	$(f \times g) (a, b) = (f a, g b)$	(77)
Def-cond	$(p \rightarrow f, g) x = \text{if } p x \text{ then } f x \text{ else } g x$	(78)
Def-proj	$\pi_1(x, y) = x \quad \wedge \quad \pi_2(x, y) = y$	(79)
Elim-let	$\text{let } x = a \text{ in } b = b[x/a]$	(80)
Elim-pair	$t = t[(x, y)/z, x/\pi_1 z, y/\pi_2 z]$	(81)
Def-ap	$ap(f, x) = f x$	(82)