Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 12 (última)

1. Seja dada a função

   $\mathsf{ap} : (C^B \times B) \to C$
   $\mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x$

   Mostre que a igualdade

   $$\mathsf{ap} \cdot (\mathit{curry}\, f \times id) = f \tag{F1}$$

   corresponde à definição $\mathit{curry}\, f\ \ a\ \ b = f\ \ (a, b)$ da função $\mathit{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ que se analisou na primeira ficha desta disciplina.

2. Abreviando $\mathit{curry}\, f$ por $\overline{f}$, identifique a propriedade (F1) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

   $$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "ap"] & C \\ A \arrow[u, "k"] & A \times B \arrow[u, "k \times id"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad k = \overline{f} \ \equiv\ \mathsf{ap} \cdot (k \times id) = f$$

3. Considere o isomorfismo

   $$\begin{tikzcd} A^{B+C} \arrow[r, bend left, "unjoin"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A^B \times A^C \arrow[l, bend left, "\mathsf{join}"] \end{tikzcd} \tag{F2}$$

   onde

   $\mathsf{join}\ (f, g) = [f\ , g]$
   $\mathit{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)$

   Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathit{unjoin} = id$ e que $\mathit{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

4. Numa ficha anterior mostrou-se que sempre que duas funções f e g satisfazem a propriedade

   $$f\ y = x \quad \equiv \quad y = g\ x \tag{F3}$$

   são inversas uma da outra,

   $$\begin{array}{rcl} id & = & g \cdot f \\ f \cdot g & = & id \end{array}$$

   e, portanto, são ambas isomorfismos.

(a) Em (F3) instancie $f := \mathsf{join}$ e $g := unjoin$ de (F2) e simplifique. Que propriedade do formulário acaba de obter?

(b) Repita o exercício para o isomorfismo $(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$.

(c) Usando (F3), mostre que $\widehat{k} = \mathsf{ap} \cdot (k \times id)$, onde $\widehat{k}$ abrevia $uncurry\, k$.

5. A função $\pi_2 : A \times B \to B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão "curried" $\overline{\pi_2} : A \to (B \to B)$. Usando as leis da exponenciação mostre que, qualquer que seja f,

$$\overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2}$$

Logo $\overline{\pi_2}$ é uma função constante. Qual?

6. O quadro seguinte tabula alguns mónades estudados nesta disciplina,

Mónade	**Tipo**	μ	u (return)	$x \gg\!= f$
"Apontadores"	$1 + A$	$[i_1\ , id]$	i_2	
Mensagens de erro	Error A		Ok	
Listas	A^*	concat	$singl$	
Árvores	LTree A	join (ver Ficha 11)	Leaf	
Acções sobre um estado	$(A \times S)^S$	exp ap	$\overline{id}$	$\widehat{f} \cdot x$

onde exp f designa o mesmo que $\overline{f \cdot \mathsf{ap}}$, isto é, exp $f\ g = f \cdot g$. Calcule as definições que faltam na tabela, sabendo que Error é o tipo

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Error}\ a = \mathsf{Ok}\ a \mid \mathsf{Error\ String}$$

7. Considere as seguintes acções que habitam o mónade de estado St $A = (A \times S)^S$, para um dado espaço de estados S:

$$query\ f = \langle f, id \rangle \tag{F4}$$
$$modify\ g = \langle !, g \rangle \tag{F5}$$

A acção $query\ f$ interroga o estado aplicando-lhe a observação f e deixando-o inalterado; já a acção $modify\ g$ recorre a g para actualizar o valor corrente do estado, dando como resultado um mero "acknowledgement" da accção realizada.

Mostre que as igualdades

$$\mathbf{do}\ \{ modify\ id; query\ g \} = query\ g \tag{F6}$$
$$\mathbf{do}\ \{ modify\ f; modify\ g \} = modify\ (g \cdot f) \tag{F7}$$

se verificam.