Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 11

1. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u,

$$\mathsf{A} \xrightarrow{u} \mathsf{T\ A} \xleftarrow{\mu} \mathsf{T\ (T\ A)}$$

que satisfazem (para além das "grátis") as propriedades

$$\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u \tag{F1}$$
$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu \tag{F2}$$

com base nas quais se pode definir a *composição monádica* $f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T}\ f \cdot g$. Demonstre os factos seguintes:

$$\mu \;=\; id \bullet id \tag{F3}$$
$$f \bullet u = f \;\wedge\; f = u \bullet f \tag{F4}$$
$$f \bullet (g \bullet h) \;=\; (f \bullet g) \bullet h \tag{F5}$$
$$\mathsf{T}\, f \;=\; (u \cdot f) \bullet id \tag{F6}$$

2. O mais simples de todos os mónades é o da identidade, $\mathsf{T\ X = X}$, em que $\mu = u = id$. Mostre que se tem de imediato, neste mónade: $f \bullet g = f \cdot g$.

3. No mónade das listas tem-se $\mu = \mathsf{concat} = (\![\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}]\!)$ para $\mathsf{conc} = \widehat{(+\!\!+)}$. Logo a composição monádica $f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T}\ f \cdot g$ será, para o mónade das listas,

   $(f \bullet g)\ x = f'\ (g\ x)$
   $\quad \mathbf{where}\ f' = \mathsf{concat} \cdot \mathsf{map}\ f$

   Com base na lei de absorção-cata, calcule a seguinte definição de f' com variáveis:

   $f'\ [\,] = [\,]$
   $f'\ (h : t) = (f\ h) +\!\!+ f'\ t$

4. O functor do tipo LTree forma um mónade cuja unidade u é o construtor Leaf e cuja multiplicação μ é a função

   $\mathsf{join} :: \mathsf{LTree}\ (\mathsf{LTree}\ a) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a$
   $\mathsf{join} = (\![id\ , \mathsf{Fork}]\!)$

   Recorra às leis de cálculo de catamorfismos que conhece para mostrar que join satisfaz as duas leis (F1) e (F2) que definem um mónade.

5. Assim como a composição de funções se pode definir, com variáveis, por

$$(f \cdot g)\ a = \mathbf{let}\ b = g\ a\ \mathbf{in}\ f\ b$$

existe uma notação ao mesmo nível para definir a composição monádica (a chamada "notação-**do**"):

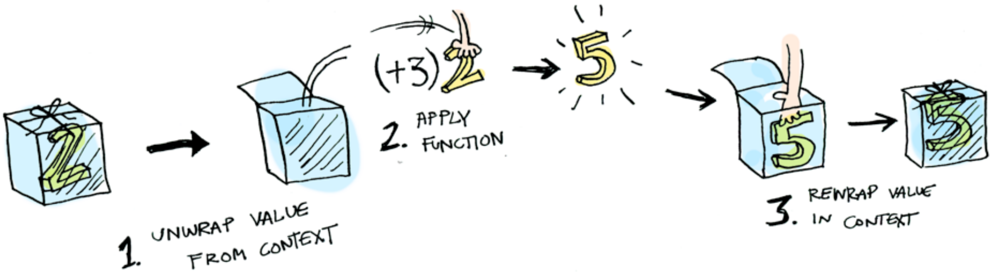
$$(f \bullet g)\ a = \mathbf{do}\ \{ b \leftarrow g\ a; f\ b \} \tag{F7}$$

Nessa notação, que é muito vulgar em Haskell (ver a classe Monad), costuma usar-se return para a unidade u do mónade em causa.

Mostre, recorrendo a (F6) e (F7), que o functor $\mathsf{T}\ f$ se pode escrever

$$\mathsf{T}\ f\ x = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; \mathsf{return}\ (f\ a) \}$$

em notação-**do**, como o desenho



sugere[1] para o cálculo de $\mathsf{T}\ (+3)\ x$, onde $x = \mathsf{return}\ 2$ é o objecto monádico que contém o número 2 no mónade T.

6. O functor

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}\ X = X \times X \\ &\mathsf{T}\ f = f \times f \end{aligned}$$

oferece um mónade que nos permite trabalhar com pares encarados como vectores (y, x) a duas dimensões. Por exemplo, neste mónade a expressão

$$\mathbf{do}\ \{ x \leftarrow (2, 3); y \leftarrow (4, 5); \mathsf{return}\ (x + y) \}$$

dá $(6, 8)$ como resultado — a soma dos vectores $(2, 3)$ e $(4, 5)$.

(a) Fazendo $\mu = \pi_1 \times \pi_2$ e $u = \langle id, id \rangle$, demonstre as propriedades (F1) e (F2) essenciais à evidência de que o functor dado equipado com μ e u é, de facto, um mónade.

(b) Que operação vectorial é expressa pela definição $op\ k\ v = \mathbf{do}\ \{ x \leftarrow v; \mathsf{return}\ (k * x) \}$? Justifique.

7. Em Haskell, um mónade declara-se (ver a classe Monad) com base na operação $x \gg\!= f$ (conhecida como aplicação monádica, ou "binding" de f a x) que é tal que

$$x \gg\!= f = (f \bullet id)\ x \tag{F8}$$

(a) Mostre que $x \gg\!= f = (\mu \cdot \mathsf{T}\ f)\ x = \mathbf{do}\ \{ a \leftarrow x; f\ a \}$. Qual é o tipo de id na igualdade (F8)? Faça um diagrama explicativo.

(b) Com base na igualdade (F8), mostre que $(x \gg\!= g) \gg\!= f$ é a mesma coisa que $x \gg\!= (f \bullet g)$.

[1] Créditos: ver as ilustrações de `http://adit.io/posts/2013-04-17-functors,_applicatives,_and_monads_in_pictures.html`.