Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 10

1. Defina como um catamorfismo a função seguinte, extraída do *Prelude* do Haskell,

   $$\begin{array}{l} \mathsf{concat} :: [[a]] \rightarrow [a] \\ \mathsf{concat} = \mathsf{foldr}\ (+\!\!+)\ [\,] \end{array}$$

   e mostre que a propriedade

   $$\mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = \mathsf{sum} \cdot \mathsf{map}\ \mathsf{length} \qquad \text{(F1)}$$

   se verifica, recorrendo às leis de *fusão*- e *absorção*-cata (identifique-as no formulário) sabendo que, para listas, se tem $\mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g$, $\mathsf{F}\ f = \mathsf{B}\ (id, f)$ e $\mathsf{T}\ f = \mathsf{map}\ f$.

2. O diagrama genérico de um catamorfismo de gene g sobre o *tipo paramétrico*

   $$\mathsf{T}\ X \quad \cong \quad \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X)$$

   de base B, bem como a sua propriedade universal, são representados a seguir:

   $$\begin{tikzcd} \mathsf{T}\ X \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & \mathsf{B}\ (X, \mathsf{T}\ X) \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{B}\ (id, (\!|g|\!))"] \\ B & \mathsf{B}\ (X, \mathsf{B}) \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad k = (\!|g|\!) \equiv k \cdot \mathsf{in} = g \cdot \mathsf{B}\ (id, k)$$

   Nesta disciplina vimos vários exemplos de $\mathsf{T}\ X$, por exemplo listas finitas e dois tipos de árvores binárias:

   $$\begin{array}{l} \mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a) \\ \mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = \mathsf{Empty} \mid \mathsf{Node}\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a)) \end{array}$$

   A estes tipos podemos acrescentar outros como, por exemplo, o das listas não vazias

   $$\mathbf{data}\ \mathsf{NEList}\ a = \mathsf{Sing}\ a \mid \mathsf{Add}\ (a, \mathsf{NEList}\ a)$$

   e o das chamadas "rose trees":

   $$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = \mathsf{Rose}\ (a, [\mathsf{Rose}\ a])$$

   Preencha o quadro seguinte, em que a coluna da esquerda identifica funções sobre o tipo da coluna $\mathsf{T}\ A$, funções essas que conhece ou cujo significado facilmente identifica:[1]

[1] **NB:** assuma as definições $umax = \widehat{\mathsf{max}}$, $\mathsf{conc} = \widehat{(+\!\!+)}$ etc. A repetição dos identificadores na coluna da esquerda é intencional, de outra forma os mesmos identificadores indicariam como preencher o resto do quadro.

k	g	$\mathsf{B}\ (A, X)$	$\mathsf{B}\ (f, g)$	$\mathsf{T}\ A$	in	B
length		$1 + A \times X$		$[A]$	$[\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$	$\mathbb{N}_0$
length			$f + f \times g$	NEList A		$\mathbb{N}_0$
$count$					$[\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$	$\mathbb{N}$
$listify$	$[singl\ , \mathsf{conc}]$			LTree A		$[A]$
$reverse$					$[\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$	
sum		$1 + A \times X^2$				
sum					$[\mathsf{Sing}\ , \mathsf{Add}]$	
mirror	$\mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap})$				$[\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$	
mirror					$[\mathsf{Empty}\ , \mathsf{Node}]$	
filter p			$id + f \times g$	$[A]$		$[A]$
$gmax$	$[id\ , umax]$	$A + A \times X$				A
$gmax$	$[id\ , umax]$				$[\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$	A
$count$	$\mathsf{succ} \cdot \mathsf{sum} \cdot \pi_2$		$f \times \mathsf{map}\ g$			
mirror	$\mathsf{in} \cdot (id \times reverse)$					

3. A função correspondente a concat para árvores é

$$\mathsf{join} :: \mathsf{LTree}\ (\mathsf{LTree}\ a) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a$$
$$\mathsf{join} = \llparenthesis [id\ , \mathsf{Fork}] \rrparenthesis$$

que junta uma *árvore de árvores* de tipo LTree numa só árvore. Conjecture a propriedade (F1) para join e demonstre-a.

4. Recorra às leis dos catamorfismos para demonstrar a propriedade natural

$$(\mathsf{LTree}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \quad = \quad \mathsf{mirror} \cdot (\mathsf{LTree}\ f) \tag{F2}$$

onde mirror é o catamorfismo

$$\mathsf{mirror} :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ a$$
$$\mathsf{mirror} = \llparenthesis\ \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) \rrparenthesis$$

que "espelha"uma árvore e LTree $f = \llparenthesis\ \mathsf{in} \cdot (f + id) \rrparenthesis$ é o correspondente functor de tipo.

5. O tipo $1 + A$ ("apontador" para A) foi o primeiro exemplo de **mónade** apresentado nesta disciplina, em que

$$\mu \quad = \quad [i_1\ , id] \tag{F3}$$
$$u \quad = \quad i_2 \tag{F4}$$

Mostre que μ e u satisfazem as duas propriedades seguintes:

$$\mu \cdot u = \mu \cdot (id + u) = id \tag{F5}$$
$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot (id + \mu) \tag{F6}$$

NB: comece por desenhar os diagramas destas propriedades para as perceber melhor.