Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 8

1. Considere o tipo genérico das árvores binárias com informação nas folhas

$$\textbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

e a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{mirror}\ (\mathsf{Leaf}\ a) = \mathsf{Leaf}\ a \\ \mathsf{mirror}\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = \mathsf{Fork}\ (\mathsf{mirror}\ y, \mathsf{mirror}\ x) \end{array}$$

que "espelha" árvores binárias desse tipo.

(a) Mostre que

$$\mathsf{mirror} = (\!|\mathit{inLTree} \cdot (\mathit{id} + \mathsf{swap})|\!) \tag{F1}$$

para $\mathit{inLTree} = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$ e desenhe o digrama que representa este catamorfismo.

(b) Tal como swap, mirror é um isomorfismo de árvores pois é a sua própria inversa:

$$\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = \mathit{id} \tag{F2}$$

Complete a seguinte demonstração de (F2):

$$\begin{array}{cl} & \mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = \mathit{id} \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot (\!|\mathit{inLTree} \cdot (\mathit{id} + \mathsf{swap})|\!) = (\!|\mathit{inLTree}|\!) \\ \Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot \ldots = \ldots \\ \ldots & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (\mathit{etc}) \end{array}$$

2. Assumindo as definições $\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$, $\mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$, $\mathsf{succ}\ n = n+1$, $\mathsf{nil} = \underline{[\,]}$ e $\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t$, mostre que o diagrama

$$\begin{tikzcd} {[\mathbb{N}_0]} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}"] \\ \mathbb{N}_0 \arrow[u, "f"] \arrow[r, bend left, "\mathsf{out}_{\mathbb{N}_0}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, bend left, "\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0}"] \arrow[r, "id + \langle g, id \rangle"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id + id \times f"'] \end{tikzcd}$$

define o *anamorfismo* de listas

$$f \quad = \quad [\!(\,(id + \langle g, id\rangle) \cdot \mathsf{out}_{\mathbb{N}_0}\,)\!]$$

e diga o que faz este anamorfismo para $g = \mathsf{succ} \cdot (2*)$.

3. A função

   $\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,]$
   $\mathsf{map}\ f\ (h : t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t$

   é o catamorfismo de listas $\mathsf{map}\ f = (\!|\mathsf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$, para $\mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}]$. Mostre que a mesma função se pode escrever como um anamorfismo:

   $$\mathsf{map}\ f = [\!(\,(id + f \times id) \cdot \mathsf{out}\,)\!] \tag{F3}$$

4. Mostre que o anamorfismo de listas

   $suffixes = [\!(g)\!]\ \mathbf{where}\ g = (id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2\rangle) \cdot \mathsf{out}$

   é a função

   $suffixes\ [\,] = [\,]$
   $suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t$

5. O algoritmo da divisão inteira,

   $m \div n$
   $\quad \mid m < n = 0$
   $\quad \mid \mathbf{otherwise} = 1 + (m - n) \div n$

   corresponde ao anamorfismo de naturais $(\div n) = [\!(g\ n)\!]$ em que $g\ n = (<\!n) \rightarrow (i_1 \cdot !), (i_2 \cdot (-n))$. É de esperar que o algoritmo dado satisfaça a propriedade $(m * n) \div n = m$, isto é, $(\div n) \cdot (*n) = id$. Complete a prova seguinte dessa propriedade, que se baeia na lei de fusão dos anamorfismos (identifique-a no formulário):

   $$\begin{array}{cl}
   & (\div n) \cdot (*n) = id \\
   \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & [\!(g\ n)\!] \cdot (*n) = [\!(\mathsf{out})\!] \\
   \Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & (g\ n) \cdot (*n) = (id + (*n)) \cdot \mathsf{out} \\
   \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & ((<\!n) \cdot (*n)) \rightarrow (i_1 \cdot !), (i_2 \cdot (-n) \cdot (*n)) = (id + (*n)) \cdot \mathsf{out} \\
   \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & (=0) \rightarrow (i_1 \cdot !), (i_2 \cdot (*n) \cdot pred) = (id + (*n)) \cdot \mathsf{out} \\
   \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & (id + (*n)) \cdot \mathsf{out} = (id + (*n)) \cdot \mathsf{out} \\
   \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
   & true
   \end{array}$$

6. Mostre que a função mirror da primeira questão desta ficha se pode definir como o anamorfismo

   $$\mathsf{mirror} = [\!(\,(id + \mathsf{swap}) \cdot outLTree\,)\!] \tag{F4}$$

   onde $outLTree$ é a conversa de $inLTree$ e volte a demonstrar (F2), desta vez recorrendo à lei de fusão dos anamorfismos.