Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 7

1. A a função seguinte, em Haskell

$$sumprod\ a\ [\,] = 0$$
$$sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t$$

é o catamorfismo de listas

$$sumprod\ a \quad = \quad (\![\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]\!) \tag{F1}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$.

Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de fusão-cata para listas, que

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{F2}$$

onde $\mathsf{sum} = (\![\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

2. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = \mathsf{Int} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{array}\right.$$

Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{F}\ X \times \mathsf{G}\ X$$

3. Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ e $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ que a seguir se definem:

$$(\mathsf{F} + \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) + (\mathsf{G}\ X)$$
$$(\mathsf{F} \times \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) \times (\mathsf{G}\ X)$$

4. Todo o tipo de dados monomórfico A (e.g. Bool, $\mathbb{N}_0$) tem um functor associado, dito *constante*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathsf{A}\ X = A \\ \mathsf{A}\ f = id \end{array}\right.$$

Defina o bifunctor $\mathsf{B}\ (X, Y) = \mathsf{A} + X \times Y$ e infira (através de um diagrama) a propriedade natural de uma função polimórfica f que tenha tipo $f : \mathsf{B}\ (X, Y) \to \mathsf{A} + X$.

5. As seguintes funções mutuamente recursivas testam a paridade de um número:

$$\left\{\begin{array}{l} impar\ 0 = \mathsf{False} \\ impar\ (n + 1) = par\ n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} par\ 0 = \mathsf{True} \\ par\ (n + 1) = impar\ n \end{array}\right.$$

Mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{impar} \cdot \mathsf{in} = h \cdot (id + \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle) \\ \mathit{par} \cdot \mathsf{in} = k \cdot (id + \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle) \end{array}\right.$$

para um dado h e k (deduza-os).

De seguida, recorra às leis da recursividade múltipla e da troca para mostrar que $\mathit{imparpar} = \langle \mathit{impar}, \mathit{par} \rangle$ é o ciclo-for:

$$\mathit{imparpar} = \mathsf{for\ swap\ (False, True)}$$

6. Defina-se a função $\mathit{average} = \mathit{ratio} \cdot \langle \mathsf{sum}, \mathsf{length} \rangle$ para calcular a média de uma lista não vazia, onde $\mathit{ratio}\ (n, d) = n \mathbin{/} d$, para $d \not\equiv 0$. Sabendo que sum e length são catamorfismos (recorde quais são os seus genes), recorra à lei "banana-split"(identifique-a no formulário) para provar que $\mathit{average}$ é também um catamorfismo, que converte para

$$\begin{array}{l} \mathit{average}\ l = x \mathbin{/} y\ \mathbf{where} \\ \quad (x, y) = \mathit{aux}\ l \\ \quad \mathit{aux}\ [\,] = (0, 0) \\ \quad \mathit{aux}\ (a : l) = (a + x, y + 1)\ \mathbf{where}\ (x, y) = \mathit{aux}\ l \end{array}$$

em Haskell.

7. Considere o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} \mathsf{NTree} \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & \mathbb{N}_0 + \mathsf{NTree} \times \mathsf{NTree} \arrow[l, "\mathsf{in} = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]"'] \arrow[d, "id + \llparenthesis g \rrparenthesis \times \llparenthesis g \rrparenthesis"] & (= \mathsf{F\ NTree}) \arrow[d, "(= \mathsf{F} \llparenthesis g \rrparenthesis)"] \\ A & \mathbb{N}_0 + A \times A \arrow[l, "g"] & (= \mathsf{F\ A}) \end{tikzcd}$$

que representa catamorfismos do tipo NTree (árvores binárias de números naturais):

$$\mathbf{data}\ \mathsf{NTree} = \mathsf{Leaf}\ \mathbb{N}_0 \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{NTree}, \mathsf{NTree})$$

para os quais $\mathsf{F}\ X = \mathbb{N}_0 + X \times X$.

Exprima sob a forma de catamorfismos deste tipo as funções seguintes: (a) função que soma todos os números que estão na árvore; (b) função que identifica o maior desses números; (c) função que substitui todos os números por zero; (d) função que conta quantos zeros estão na árvore. Em cada caso identifique o gene g do respectivo catamorfismo.

8. Recordando o isomorfismo

$$\mathsf{undistl} = [i_1 \times id\ , i_2 \times id] \tag{F3}$$

e o seu inverso distl cuja propriedade natural é

$$(f \times h + g \times h) \cdot \mathsf{distl} = \mathsf{distl} \cdot ((f + g) \times h) \tag{F4}$$

mostre que o catamorfismo de listas

$$f = \llparenthesis [\mathsf{nil}\ , [\pi_2\ , \mathsf{cons}] \cdot \mathsf{distl}] \rrparenthesis$$

é a função

$$\begin{array}{l} f\ [\,] = [\,] \\ f\ ((i_1\ a) : t) = f\ t \\ f\ ((i_2\ b) : t) = b : f\ t \end{array}$$

que selecciona todos os Bs que ocorrem numa lista de As ou Bs.