Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 6

1. O diagrama que se segue representa a lei gnérica para fusão de catamorfismos (identifique-a no formulário)

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T} \arrow[d, "\llparenthesis g \rrparenthesis"'] & \mathsf{F}\,\mathsf{T} \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\,\llparenthesis g \rrparenthesis"] \\
A \arrow[d, "f"'] & \mathsf{F}\,A \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\mathsf{F}\,f"] \\
B & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}
\qquad
f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \;\Leftarrow\; f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f
$$

em que T é um tipo indutivo (eg. listas, $\mathbb{N}_0$) e in é a sua álgebra de construção (com inversa out., não representada no diagrama). Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$
\begin{array}{ll}
 & f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis = \llparenthesis h \rrparenthesis \\
\equiv & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \} \\
 & f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\,(f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis) \\
\equiv & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \} \\
 & f \cdot \llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\,f \cdot \mathsf{F}\,\llparenthesis g \rrparenthesis \\
\equiv & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \} \\
 & f \cdot g \cdot \mathsf{F}\,\llparenthesis g \rrparenthesis = h \cdot \mathsf{F}\,f \cdot \mathsf{F}\,\llparenthesis g \rrparenthesis \\
\Leftarrow & \quad \{ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \} \\
 & f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f
\end{array}
$$

2. Recorra à lei de fusão deduzida na questão 1 para demonstrar a propriedade:

$$f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{F1}$$

3. O combinador

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{const} :: a \to b \to a \\
\mathsf{const}\ a\ b = a
\end{array}
$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Sabendo as seguintes proprieades deste combinador (identifique-as no formulário),

$$
\begin{array}{rcl}
\underline{k} \cdot g & = & \underline{k} \\
f \cdot \underline{k} & = & \underline{f\ k}
\end{array}
$$

demonstre a igualdade

$$\underline{(b,a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \qquad \text{(F2)}$$

a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.

4. Considere a função

$$insgfor = \mathsf{for}\ \langle (1+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle\ (1, [\,])$$

   (a) Resolvendo a equação $\langle fsucc, insg \rangle = insgfor$ em ordem a $fsucc$ e $insg$ usando as leis da recursividade múltipla e da troca (identifique-as no formulário), bem como (F2) acima, obtenha as seguintes definições

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (fsuc\ n) : insg\ n \\ fsuc\ 0 = 1 \\ fsuc\ (n+1) = fsuc\ n + 1 \end{array}$$

   para essas funções.

   (b) Mostre ainda que $fsucc = \mathsf{succ}$ e que, portanto, $insg$ se pode simplicar em:

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (n+1) : insg\ n \end{array}$$

   (c) Diga por palavaras suas o que faz a função $insg$.

5. Atente no diagrama da lei de "banana-split"

$$\langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle = (\!| (i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\,\pi_1, \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle |\!) \qquad \text{(F3)}$$

que abaixo se apresenta (identifique-a no formulário), onde T é um tipo indutivo genérico definido sobre o functor F.

- Identifique as funções $f1$, $f2$, ... $f6$ que encaixam no diagrama.
- Há duas maneiras de escrever $f7$: identifique-as e deduza a lei (F3) a partir delas.