Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Ciências da Computação e Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 4

1. Considere a função $\mathsf{coassocr} = [id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]$ que é uma das testemunhas do isomorfismo $(A + B) + C \cong A + (B + C)$, da esquerda para a direita. Calcule a sua conversa $\mathsf{coassocl}$ a partir da equação

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

Sugestão: Faça-o resolvendo em ordem a x,y e z a seguinte versão dessa equação:

$$\underbrace{[x \ , [y \ , z]]}_{\mathsf{coassocl}} \cdot \underbrace{[id + i_1 \ , i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

2. Sejam dadas, em geral, duas funções f e g satisfazendo a propriedade

$$f \ y = x \quad \equiv \quad y = g \ x \tag{F1}$$

   (a) Mostre que f e g são inversas uma da outra — isto é, que as igualdades $id = g \cdot f$ e $f \cdot g = id$ verificam-se — e que, portanto, são ambas isomorfismos.

   (b) Escreva a equivalência (F1) para o caso $f = \mathsf{assocr}$ (identifique g).

3. Deduza o tipo mais geral da função $f = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

4. Considere a função $\mathsf{iso} = \langle ! + !, [id \ , id] \rangle$.

   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.

   (b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso,

$$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f) \tag{F2}$$

   (c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.

   (d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.

5. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

6. Para o caso de um *isomorfismo* h, a lei de Leibniz (identifique-a no formulário) transforma-se numa equivalência:

$$f \cdot h \ = \ g \cdot h \quad \equiv \quad f = g \tag{F3}$$

Recorra a esta propriedade para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

Sugestão: não ignore a propriedade natural do isomorfismo distr.

7. Considere a seguinte declaração de um tipo de *árvores binárias*, em Haskell:

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

Indagando os tipos dos construtores Leaf e Fork, por exemplo no GHCi,

```
*LTree> :t Fork
Fork :: (LTree a, LTree a) -> LTree a
*LTree> :t Leaf
Leaf :: a -> LTree a
```

é fácil desenhar o diagrama que explica a construção da função

$$inLTree = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$$

Desenhe-o e calcule a sua inversa

$$\begin{array}{l} outLTree :: \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{Either}\ a\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a) \\ outLTree\ (\mathsf{Leaf}\ a) = i_1\ a \\ outLTree\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = i_2\ (x, y) \end{array}$$

resolvendo a equação

$$outLTree \cdot inLTree \quad = \quad id$$

em ordem a $outLTree$.

8. Recorde a função $\mathsf{map} :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b]$. Assumindo como válida a seguinte propriedade dessa função,

$$k = \mathsf{map}\ f \quad \equiv \quad k \cdot [nil\ , \mathsf{cons}] = [nil\ , \mathsf{cons}] \cdot (id + f \times k) \tag{F4}$$

para k do mesmo tipo que $\mathsf{map}\ f$ e em que $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$ e $nil\ x = [\,]$, demonstre os factos seguintes:

$$\begin{array}{rcll} \mathsf{map}\ id & = & id & \text{(F5)} \\ (\mathsf{map}\ f) \cdot nil & = & nil & \text{(F6)} \\ \mathsf{map}\ f\ (a : x) & = & (f\ a) : (\mathsf{map}\ f\ x) & \text{(F7)} \end{array}$$

9. Mostre que a função $for\ b\ i$, onde

$$\begin{array}{l} for\ b\ i\ 0 = i \\ for\ b\ i\ (n + 1) = b\ (for\ b\ i\ n) \end{array}$$

é solução da equação seguinte, em x

$$x \cdot \mathsf{in} = [\underline{i}\ , b] \cdot (id + x) \tag{F8}$$

onde $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$, $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.