Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 3

1. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g\rangle, \langle h, k\rangle] = \langle [f, h], [g, k]\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g"' near end] & A + B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dll, "h" near end] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D
\end{tikzcd}$$

   Analiticamente, esta lei demonstra-se facilmente resolvendo em ordem a x a equação

$$[\langle f, g\rangle, \langle h, k\rangle] \quad = \quad x \tag{1}$$

   Faça essa demonstração a partir do esboço seguinte:

$$\begin{array}{cl}
& x = [\langle f, g\rangle, \langle h, k\rangle] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \vdots \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& x = \langle [f, h], [g, k]\rangle
\end{array}$$

2. Considere a função $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$.
   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando o diagrama respectivo.
   (b) Recorra à lei da troca (cf. questão anterior) para re-escrever undistl sob a forma de um *split*.
   (c) Demonstre a seguinte propriedade: $\pi_1 \cdot \mathsf{undistl} = \pi_1 + \pi_1$.
   (d) Derive a definição *pointwise* de undistl.

3. Uma função diz-se *constante* sempre que o seu resultado é o mesmo, qualquer que seja o argumento. Por isso se designa uma tal função sublinhando o valor do seu resultado: se este for k, por exemplo, ter-se-á a função $\underline{k} :: a \rightarrow b$, para k um valor de b, que satisfaz sempre a propriedade

$$\underline{k} \cdot f \quad = \quad \underline{k} \tag{2}$$

   qualquer que seja k e f. Mostre que $[\underline{k}, \underline{k}] = \underline{k}$.
   NB: A função $\underline{k}$ escreve-se `const k` em Haskell.

4. Recorra à lei Eq-$+$ (entre várias outras) para mostrar que a definição que conhece da função factorial,

$$\begin{array}{l}
\mathit{fac}\ 0 = 1 \\
\mathit{fac}\ (n+1) = (n+1) * \mathit{fac}\ n
\end{array}$$

é equivalente à equação seguinte

$$fac \cdot [\underline{0}, \mathsf{succ}] = [\underline{1}, mul \cdot \langle \mathsf{succ}, fac \rangle].$$

onde $\mathsf{succ}\ n = n + 1$ e $mul\ (a, b) = a * b$.

5. No contexto da questão anterior, considere a função $\mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{succ}]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[d, "\mathsf{in}=[\underline{0},\mathsf{succ}]"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathsf{succ}"] \\
& \mathbb{N}_0 &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo $()$ em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por $()$, calcule a inversa de in,

$\mathsf{out}\ 0 = i_1\ ()$
$\mathsf{out}\ (n + 1) = i_2\ n$

resolvendo em ordem a out a equação $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$ e introduzindo variáveis. (Poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

6. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo $h\ x = \mathbf{if}\ p\ x\ \mathbf{then}\ f\ x\ \mathbf{else}\ g\ x$ ou

$h\ x$
$\quad |\ p\ x = f\ x$
$\quad |\ \mathbf{otherwise} = g\ x$

são escritas usando o combinador ternário

$p \rightarrow f, g$

conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição é (ver formulário e diagrama em baixo)

$$p \rightarrow f, g \quad = \quad [f, g] \cdot p?$$

onde

$$p?\ x = \begin{cases} i_1\ x\ \mathbf{if}\ p\ x \\ i_2\ x\ \mathbf{if}\ \neg p\ x \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "p?"'] & \\
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & A + A \arrow[d, "{[f,g]}"] & A \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Demonstre a seguinte lei de fusão deste combinador condicional (identifique-a no formulário):

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h) \tag{4}$$

7. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k \ = \ k \tag{5}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \ = \ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{6}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{7}$$
$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{8}$$
$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) \ = \ p \rightarrow a, d \tag{9}$$