

Cálculo de Programas

2.º ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.º 3

1. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = \langle [f, h], [g, k] \rangle$$

Analiticamente, esta lei demonstra-se facilmente resolvendo em ordem a x a equação

$$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = x \tag{1}$$

Faça essa demonstração a partir do esboço seguinte:

$$\begin{aligned}
 x &= [\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \vdots \\
 \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\
 x &= \langle [f, h], [g, k] \rangle
 \end{aligned}$$

2. Considere a função $\text{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$.
- (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando o diagrama respectivo.
 - (b) Recorra à lei da troca (cf. questão anterior) para re-escrever undistl sob a forma de um *split*.
 - (c) Demonstre a seguinte propriedade: $\pi_1 \cdot \text{undistl} = \pi_1 + \pi_1$.
 - (d) Derive a definição *pointwise* de undistl .
3. Uma função diz-se *constante* sempre que o seu resultado é o mesmo, qualquer que seja o argumento. Por isso se designa uma tal função sublinhando o valor do seu resultado: se este for k , por exemplo, ter-se-á a função $\underline{k} :: a \rightarrow b$, para k um valor de b , que satisfaz sempre a propriedade

$$\underline{k} \cdot f = \underline{k} \tag{2}$$

qualquer que seja k e f . Mostre que $[\underline{k}, \underline{k}] = \underline{k}$.

NB: A função \underline{k} escreve-se `const k` em Haskell.

4. Recorra à lei Eq-+ (entre várias outras) para mostrar que a definição que conhece da função factorial,

$$\begin{aligned}
 \text{fac } 0 &= 1 \\
 \text{fac } (n + 1) &= (n + 1) * \text{fac } n
 \end{aligned}$$

é equivalente à equação seguinte

$$fac \cdot [0, succ] = [1, mul \cdot \langle succ, fac \rangle].$$

onde $succ \ n = n + 1$ e $mul \ (a, b) = a * b$.

5. No contexto da questão anterior, considere a função $in = [0, succ]$ que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \xrightarrow{i_1} & 1 + \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{i_2} & \mathbb{N}_0 \\
 & \searrow \underline{0} & \downarrow in = [0, succ] & \swarrow succ & \\
 & & \mathbb{N}_0 & &
 \end{array} \tag{3}$$

Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo $()$ em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por $()$, calcule a inversa de in ,

$$\begin{aligned}
 out \ 0 &= i_1 \ () \\
 out \ (n + 1) &= i_2 \ n
 \end{aligned}$$

resolvendo em ordem a out a equação $out \cdot in = id$ e introduzindo variáveis. (Poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

6. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo $h \ x = \mathbf{if} \ p \ x \ \mathbf{then} \ f \ x \ \mathbf{else} \ g \ x$ ou

$$\begin{array}{l}
 h \ x \\
 | \ p \ x = f \ x \\
 | \ \mathbf{otherwise} = g \ x
 \end{array}$$

são escritas usando o combinador ternário

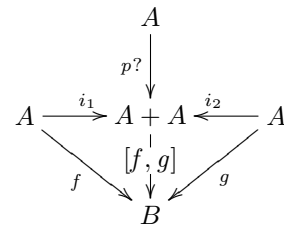
$$p \rightarrow f, g$$

conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição é (ver formulário e diagrama em baixo)

$$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$$

onde

$$p? \ x = \begin{cases} i_1 \ x & \mathbf{if} \ p \ x \\ i_2 \ x & \mathbf{if} \ \neg p \ x \end{cases}$$



Demonstre a seguinte lei de fusão deste combinador condicional (identifique-a no formulário):

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h) \tag{4}$$

7. Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k = k \tag{5}$$

$$(p? + p?) \cdot p? = (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{6}$$

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{7}$$

$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle = p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{8}$$

$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) = p \rightarrow a, d \tag{9}$$