# Cálculo de Programas

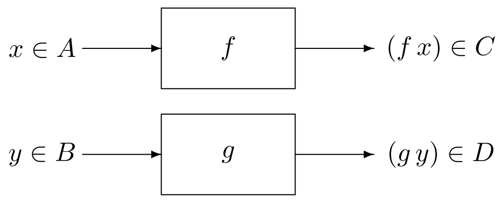
2.° ano das Licenciaturas em
Ciências da Computação e Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2014/15 - Ficha nr.° 2

1. Seja dada a função $\mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$. Faça um diagrama que explique o tipo de swap e mostre, usando o cálculo de programas, que $\mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} = id$, onde $id$ é a função identidade.

2. Repita a questão anterior para a função $\mathsf{coswap} = [i_2\ , i_1]$.

3. O diagrama de blocos




descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{F1}$$

que capta a aplicação *paralela* e *independente* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$ .

   (a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

   (b) Sem recorrer à alínea anterior, demonstre as igualdades

$$id \times id = id$$
$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$$
$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$$

4. O combinador funcional *soma* define-se por:

$$f + g = [i_1 \cdot f\ , i_2 \cdot g] \tag{F2}$$

Identifique os nomes das seguintes propriedades

$$id + id = id$$
$$(f + g) \cdot i_1 = i_1 \cdot f$$
$$(f + g) \cdot i_2 = i_2 \cdot g$$

no **formulário** da disciplina e demonstre-as usando o cálculo de programas.

5. Considere as funções seguintes:

$$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$$
$$g = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

(a) Identifique, justificadamente, os seus tipos

(b) Mostre que $f \cdot g = id$.

6. Todas as leis do cálculo dos combinadores $\langle f, g \rangle$ e $[f\ ,g]$ podem ser derivadas das respectivas *propriedades universais*, respectivamente

$$k = \langle f, g \rangle \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right.$$

e

$$k = [f\ ,g] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{array} \right.$$

(a) Identifique-as no formulário disponível na página *web* da disciplina.

(b) Use a segunda para demonstrar a lei $[i_1\ ,i_2] = id$ conhecida por *Reflexão*-$+$.

(c) Use também a segunda para demonstrar a lei

$$[f\ ,g] = [h\ ,k] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} f = h \\ g = k \end{array} \right.$$

que também consta desse formulário sob a designação *Eq*-$+$.

7. Considere uma função $d$ da qual apenas conhece duas propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot d = id \\ \pi_2 \cdot d = id \end{array} \right. \tag{F3}$$

Mostre, recorrendo directamente à propriedade universal correspondente que essa função é, necessariamente, a mesma que em Programação Funcional escreveria da forma seguinte, em Haskell:

$$d :: a \to (a, a)$$
$$d\ a = (a, a)$$

(Esta função, que duplica um valor, designa-se habitualmente por função *diagonal*.)

8. Identifique os tipos das expressões $\langle \pi_1, \langle id, \pi_2 \rangle \rangle$ e $\langle id, \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$. Como compara este último com o tipo da função $d$ da alínea anterior?