Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2013/14 - Ficha nr.° 9

1. Seja dada a função seguinte, em Haskell:

$$\begin{aligned}&\mathsf{sumprod}\ a\ [\,] = 0\\ &\mathsf{sumprod}\ a\ (h:t) = a * h + \mathsf{sumprod}\ a\ t\end{aligned}$$

   (a) Mostre que

$$\mathsf{sumprod}\ a \quad = \quad (\!|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]|\!) \tag{1}$$

   onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$, $\mathsf{add} = \widehat{(+)}$ e o catamorfismo é de listas, isto é, tem padrão de recursividade $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$.

   (b) Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de fusão-cata para listas, que

$$\mathsf{sumprod}\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{2}$$

   onde $\mathsf{sum} = (\!|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]|\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

2. A função

$$\begin{aligned}&\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,]\\ &\mathsf{map}\ f\ (h:t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t\end{aligned}$$

   é o catamorfismo de listas $\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$. Mostre, usando as leis de reflexão e fusão-cata (entre outras), que as seguintes propriedades se verificam:

$$\mathsf{map}\ id \quad = \quad id \tag{3}$$

$$(\mathsf{map}\ f) \cdot (\mathsf{map}\ g) \quad = \quad \mathsf{map}\ (f \cdot g) \tag{4}$$

3. Mostre que a função $f = look\ k$ onde

$$\begin{aligned}&look :: \mathsf{Eq}\ a \Rightarrow a \to [(a,b)] \to \mathsf{Maybe}\ b\\ &look\ k\ [\,] = \mathsf{Nothing}\\ &look\ k\ ((a,b):r)\\ &\quad \mid a \equiv k = \mathsf{Just}\ b\\ &\quad \mid otherwise = look\ k\ r\end{aligned}$$

   é um catamorfismo de listas.

4. Considere o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{Tree}\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\mathsf{in}=[\mathsf{Leaf}\ ,\mathsf{Fork}]} & \mathbb{N}_0 + \mathsf{Tree}\mathbb{N}_0 \times \mathsf{Tree}\mathbb{N}_0\\ {\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id+(\!|g|\!)\times(\!|g|\!)}\\ A & \xleftarrow[g]{} & \mathbb{N}_0 + A \times A\end{array} \qquad \begin{array}{c}(= \mathsf{F}\ \mathsf{Tree}\mathbb{N}_0)\\ \downarrow{\scriptstyle (=\mathsf{F}(\!|g|\!))}\\ (= \mathsf{F}\ \mathsf{A})\end{array}$$

que representa catamorfismos do tipo $\mathsf{Tree}\mathbb{N}_0$ (árvores binárias de números naturais):

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Tree}\mathbb{N}_0 = \mathsf{Leaf}\ \mathbb{N}_0 \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{Tree}\mathbb{N}_0, \mathsf{Tree}\mathbb{N}_0)$$

para os quais $\mathsf{F}\ \mathsf{X} = \mathbb{N}_0 + \mathsf{X} \times \mathsf{X}$.

Exprima sob a forma de catamorfismos deste tipo as funções seguintes: (a) função que soma todos os números que estão na árvore; (b) função que identifica o maior desses números; (c) função que substitui todos os números por zero; (d) função que conta quantos zeros estão na árvore. Em cada caso identifique o gene g do respectivo catamorfismo.

5. Considere o tipo das árvores binárias com informação nas folhas

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

e a função

$$\mathsf{mirror}\ (\mathsf{Leaf}\ a) = \mathsf{Leaf}\ a$$
$$\mathsf{mirror}\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = \mathsf{Fork}\ (\mathsf{mirror}\ y, \mathsf{mirror}\ x)$$

que "espelha" árvores binárias desse tipo.

(a) Mostre que

$$\mathsf{mirror} = (\!| inLTree \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) \tag{5}$$

onde

$$inLTree = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}] \tag{6}$$

(b) Desenhe o digrama que representa o catamorfisno mirror.

(c) É fácil provar que mirror é um isomorfismo de árvores mostrando que a função é a sua própria inversa:

$$\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \tag{7}$$

Complete a seguinte demonstração desta propriedade:

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot (\!| inLTree \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) = (\!| inLTree |\!) \\ \Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot \ldots = inLTree \cdot \ldots \\ \ldots & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & (etc) \end{array}$$

6. Considere o par de funções

$$f1\ [\,] = [\,]$$
$$f1\ (h : t) = h : (f2\ t)$$
$$f2\ [\,] = [\,]$$
$$f2\ (h : t) = f1\ t$$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle f1, f2 \rangle$ como um catamorfismo de listas e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções $f1$ e $f2$?