

Cálculo de Programas

2.º ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2013/14 - Ficha nr.º 7

1. Considere o diagrama que representa a propriedade universal do combinador *ciclo-for* com inicialização *i* e corpo de ciclo *f*:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}=[\underline{0}, \text{succ}]} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow k & & \downarrow id+k \\
 A & \xleftarrow{[\underline{i}, f]} & 1 + A
 \end{array}
 \quad k = \text{for } f \ i \equiv k \cdot \text{in} = [\underline{i}, f] \cdot (id + k) \quad (1)$$

- (a) Demonstre a lei de reflexão correspondente,
for succ 0 = *id* .
- (b) Mostre que
for succ 1 = succ .
- (c) Mostre que as funções
f = for *id* *i*
e
g = for (*i*) *i*
são a mesma função. (Qual?)
2. Na sequência da questão anterior, mostre que a lei de cancelamento para ciclos-for (que se deduz de (1) fazendo a substituição *k* := (for *f* *i*) e simplificando) se converte no seguinte programa em Haskell:

```

for f i 0 = i
for f i (n + 1) = f (for f i n)
    
```

3. A função *k* = for *f* *i* pode ser codificada em sintaxe C escrevendo

```

int k(int n) {
    int r=i;
    int x;
    for (x=1; x<n+1; x++) {r=f(r);}
    return r;
};
    
```

Escreva em C as funções *f* e *g* da alínea 1c acima, bem como aquela que decorre da lei de reflexão da alínea 1a.

4. O diagrama seguinte representa a lei de **fusão** de ciclos-for,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}=[0, \text{succ}]} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \text{(for } f \text{ } i) \downarrow & & \downarrow \text{id} + (\text{for } f \text{ } i) \\
 A & \xleftarrow{[\underline{i}, f]} & 1 + A \\
 h \downarrow & & \downarrow \text{id} + h \\
 B & \xleftarrow{[\underline{j}, g]} & 1 + B
 \end{array} \tag{2}$$

que se enuncia assim:

$$h \cdot (\text{for } f \text{ } i) = \text{for } g \text{ } j \iff \begin{cases} h \text{ } i = j \\ h \cdot f = g \cdot h \end{cases} \tag{3}$$

Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$\begin{aligned}
 & h \cdot (\text{for } f \text{ } i) = \text{for } g \text{ } j \\
 \equiv & \{ \dots \} \\
 & (h \cdot (\text{for } f \text{ } i)) \cdot \text{in} = [\underline{j}, g] \cdot (\text{id} + h \cdot (\text{for } f \text{ } i)) \\
 \equiv & \{ \dots \} \\
 & h \cdot ((\text{for } f \text{ } i) \cdot \text{in}) = [\underline{j}, g] \cdot (\text{id} + h) \cdot (\text{id} + (\text{for } f \text{ } i)) \\
 \equiv & \{ \dots \} \\
 & h \cdot [\underline{i}, f] \cdot (\text{id} + (\text{for } f \text{ } i)) = [\underline{j}, g] \cdot (\text{id} + h) \cdot (\text{id} + (\text{for } f \text{ } i)) \\
 \Leftarrow & \{ \dots \} \\
 & h \cdot [\underline{i}, f] = [\underline{j}, g] \cdot (\text{id} + h) \\
 \equiv & \{ \dots \} \\
 & \begin{cases} h \text{ } i = j \\ h \cdot f = g \cdot h \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. Recorra à lei de fusão (3) acima deduzida para demonstrar a propriedade:

$$f \cdot (\text{for } f \text{ } i) = \text{for } f \text{ } (f \text{ } i) \tag{4}$$

Escreva em sintaxe C os programas correspondentes aos dois lados da igualdade.

6. Introduza variáveis na igualdade de funções

$$(a*) \cdot (b*) = ((a* \text{ } b)*) \tag{5}$$

mostrando assim que essa igualdade exprime a propriedade associativa da multiplicação em \mathbb{N}_0 . Sabendo que $(a*) = \text{for } (a+) \text{ } 0$, demonstre a validade de (5) usando a lei de fusão (3) acima deduzida. Assuma as propriedades de $+$ e $*$ (sobre \mathbb{N}_0) que conhece.