Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2013/14 - Ficha nr.° 6

1. Considere a igualdade *pointwise* $(\mathsf{curry}\ g)\ (f\ a)\ b = g\ (f\ a, b)$.

   (a) Mostre que essa igualdade é equivalente à lei de fusão da exponenciação,

   $$\overline{g} \cdot f \quad = \quad \overline{g \cdot (f \times id)} \tag{1}$$

   onde $\overline{g}$ abrevia $\mathsf{curry}\ g$.

   (b) Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

   $$\begin{array}{ll} & \overline{g} \cdot f = \overline{x} \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \cdot f) \times id) = x \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \times id) \cdot (f \times id)) = x \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (\mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times id)) \cdot (f \times id) = x \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & g \cdot (f \times id) = x \end{array}$$

2. Deduza a lei de reflexão da exponenciação, $\overline{\mathsf{ap}} = id$ (a) através de um diagrama ; (b) por cálculo analítico.

3. O combinador

   $$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \to b \to a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

   está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k.

   (a) Sabidas que são duas proprieades deste combinador,

   $$\underline{k} \cdot g \quad = \quad \underline{k} \tag{2}$$

   $$f \cdot (\underline{k}) \quad = \quad \underline{(f\ k)} \tag{3}$$

   demonstre a igualdade

   $$\underline{(b, a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{4}$$

   a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.

(b) A função const, cujo tipo também se pode escrever da forma $a \to a^b$, satisfaz a propriedade (natural) que é expressa pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{const}"] \arrow[d, "f"'] & A^B \arrow[d, "\mathsf{exp}\ f"] \\ C \arrow[r, "\mathsf{const}"'] & C^B \end{tikzcd}$$

Registe-a, converta-a para notação *pointwise* e exprima por palavras suas o seu significado.

(c) A função $\pi_2 : A \times B \to B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão "curried" $\overline{\pi_2} : A \to (B \to B)$. Usando as leis da exponenciação mostre que, qualquer que seja f,

$$\overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2}$$

Logo $\overline{\pi_2}$ é uma função constante. Qual?

(d) Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\begin{cases} \mathsf{F}\ X = \mathsf{Int} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{cases}$$

Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{F}\ X \times \mathsf{G}\ X$$

(e) Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F}+\mathsf{G}$ e $\mathsf{F}\times\mathsf{G}$ que a seguir se definem:

$$(\mathsf{F}+\mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) + (\mathsf{G}\ X)$$
$$(\mathsf{F}\times\mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) \times (\mathsf{G}\ X)$$

(f) Para cada tipo de dados A defina-se o functor constante

$$\begin{cases} A\ X = A \\ A\ f = id \end{cases}$$

i. Mostre que $B\ (X,Y) = A + X \times Y$ é um bifunctor e declare-o em Haskell como instância da classe `Bifunctor` definida no módulo `Cp.hs`.

ii. Infira (através de um diagrama) a propriedade natural de uma função polimórfica f com tipo $f :: B\ (X,Y) \to A + X$.

4. Considere a seguinte definição:

$$\mathsf{exp} :: (a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b))$$
$$\mathsf{exp}\ f = \overline{f \cdot \mathsf{ap}}$$

(a) Desenhe o respectivo diagrama.

(b) Demonstre que $\mathsf{exp}\ f \cdot \mathsf{exp}\ g = \mathsf{exp}\ (f \cdot g)$. Use este resultado para mostrar que, para um dado C,

$$\begin{cases} \mathsf{F}\ X = X^C \\ \mathsf{F}\ f = \mathsf{exp}\ f \end{cases}$$

é um functor.

(c) Mostre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

$$\mathsf{exp}\ f\ g = f \cdot g$$