Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2013/14 - Ficha nr.° 5

1. Infira o tipo da função $pwnil = \langle id, ! \rangle$ (extraída de `Cp.hs`) e formule a respectiva lei natural ("grátis") com recurso a um diagrama. Confirme-a com uma demonstração analítica.

2. Considere o isomorfismo

$$A \times (B+1) \quad \cong \quad A \times B + A$$

   (a) Apresente a definição *pointfree* da função que o testemunha da direita para a esquerda.
   (b) Formule a propriedade natural (*grátis*) dessa função, através de um diagrama.
   (c) Demonstre analiticamente essa propriedade.

3. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.

4. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

5. Faça a inferência do tipo polimórfico principal (isto é, mais geral) da função $\langle \pi_1 + \pi_1, [\pi_2\ , \pi_2] \rangle$ através de um diagrama e deduza daí a respectiva propriedade natural.

6. Calcule analiticamente a propriedade natural da função $twist = \mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{swap})$ recorrendo explicitamente às propriedades naturais de id e de swap.

7. Seja dada a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{ap} : (B^A \times A) \to B \\ \mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x \end{array}$$

   Mostre que a igualdade

$$\mathsf{ap} \cdot ((\mathsf{curry}\ f) \times id) = f$$

   corresponde à definição

$$\mathsf{curry}\ f\ a\ b \quad = \quad f\ (a, b)$$

   da função $\mathsf{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ que se analisou na primeira ficha desta disciplina.

8. Considere o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A^{B+C} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{unjoin}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A^B \times A^C \arrow[ll, bend left, "\mathsf{join}"] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

onde

$$\mathsf{join}\ (f, g) = [f\ , g]$$
$$\mathsf{unjoin}\ k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2)$$

Mostre que $\mathsf{join} \cdot \mathsf{unjoin} = id$ e que $\mathsf{unjoin} \cdot \mathsf{join} = id$.

9. Sejam dadas, em geral, duas funções f e g satisfazendo a propriedade

$$f\ y = x \quad \equiv \quad y = g\ x \tag{2}$$

   (a) Mostre que f e g são inversas uma da outra,

$$\begin{aligned} id &= g \cdot f \\ f \cdot g &= id \end{aligned}$$

   e que, portanto, são ambas isomorfismos.

   (b) Em (2) instancie $f := \mathsf{join}$ e $g := \mathsf{unjoin}$ (1) e simplifique. Que propriedade do formulário acaba de obter?

   (c) Repita o exercício para o isomorfismo $(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$.

10. Recorde a função $\mathsf{map} :: (a \to b) \to [\,a\,] \to [\,b\,]$. Assumindo como válida a seguinte propriedade dessa função,

$$k = \mathsf{map}\ f \quad \equiv \quad k \cdot [nil\ , \mathsf{cons}] = [nil\ , \mathsf{cons}] \cdot (id + f \times k) \tag{3}$$

para k do mesmo tipo que $\mathsf{map}\ f$ e em que $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$ e $nil\ x = [\,]$, demonstre os factos seguintes:

$$\mathsf{map}\ id = id \tag{4}$$
$$(\mathsf{map}\ f) \cdot nil = nil \tag{5}$$
$$\mathsf{map}\ f\ (a : x) = (f\ a) : (\mathsf{map}\ f\ x) \tag{6}$$

11. Considere a função, em Haskell

$$g\ (\mathsf{Leaf}\ a) = \mathsf{Leaf}\ (\mathsf{succ}\ a)$$
$$g\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = \mathsf{Fork}\ (g\ x, g\ y)$$

definida sobre uma instância do tipo de dados

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

do qual se infere a existência da função

$$inLTree = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}]$$

É possível mostrar que g satisfaz a equação

$$g \cdot inLTree = inLTree \cdot k \cdot (id + g \times g)$$

para uma dada função k. Calcule k.
Sugestão: retire as variáveis a, x e y à definição dada, converta-a numa igualdade *pointfree* e compare o resultado como a equação acima.