

# Cálculo de Programas

2.º ano das Licenciaturas em  
Ciências da Computação e Engenharia Informática  
UNIVERSIDADE DO MINHO

2013/14 - Ficha nr.º 2

1. Seja dada a função  $\text{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ . Faça um diagrama que explique o tipo de swap e mostre, usando o cálculo de programas, que  $\text{swap} \cdot \text{swap} = \text{id}$ .
2. Apresente justificações para cada um dos passos dados no cálculo que se vai seguir da propriedade

$$\langle i, j \rangle \cdot h = \langle i \cdot h, j \cdot h \rangle$$

que se conhece pelo nome de **fusão**- $\times$ . Repare como o cálculo procede resolvendo a equação

$$\langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle$$

em ordem a  $x$  e a  $y$ :

$$\begin{aligned} & \langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \pi_1 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = x \\ \pi_2 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = y \end{cases} \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} (\pi_1 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = x \\ (\pi_2 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = y \end{cases} \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} i \cdot h = x \\ j \cdot h = y \end{cases} \end{aligned}$$

3. Considere uma função  $d$  da qual apenas conhece duas propriedades:  $\pi_1 \cdot d = \text{id}$  e  $\pi_2 \cdot d = \text{id}$ . Mostre, recorrendo directamente à propriedade universal

$$k = \langle f, g \rangle \equiv \pi_1 \cdot k = f \text{ e } \pi_2 \cdot k = g \tag{1}$$

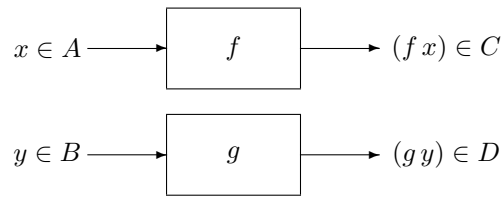
que essa função é, necessariamente, a mesma que em Programação Funcional escreveria da forma seguinte, em Haskell:

$$\begin{aligned} d &:: a \rightarrow (a, a) \\ d \ a &= (a, a) \end{aligned}$$

(Esta função, que duplica um valor, designa-se habitualmente por função *diagonal*.)

4. Identifique os tipos das expressões  $\langle \pi_1, \langle \text{id}, \pi_2 \rangle \rangle$  e  $\langle \text{id}, \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$ . Como compara este último com o tipo da função  $d$  da alínea anterior?

5. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \quad (2)$$

que capta a aplicação *paralela* de duas funções  $A \xrightarrow{f} C$  e  $B \xrightarrow{g} D$  independentes entre si.

(a) Mostre que  $(f \times g)(x, y) = (f x, g y)$ .

(b) Sem recorrer à alínea anterior, demonstre as igualdades

$$\text{id} \times \text{id} = \text{id} \quad (3)$$

$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1 \quad (4)$$

$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2 \quad (5)$$

(c) Demonstre a lei de **absorção**- $\times$ :

$$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle \quad (6)$$

**Sugestão:** resolva em ordem a  $x$  e  $y$  a equação  $(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle x, y \rangle$ .

6. Considere as funções seguintes:

$$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times \text{id} \rangle$$

$$g = \langle \text{id} \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

(a) Identifique, justificadamente, os seus tipos

(b) Mostre que  $f \cdot g = \text{id}$ .

7. Considere o seguinte tipo, em Haskell,

```
data Vec a b = Vec { x :: a, y :: b }
```

que lhe permite representar vectores a duas dimensões  $a$  e  $b$ .

(a) A semântica da linguagem garante-nos, por construção, as igualdades  $x (\text{Vec } a \ b) = a$  e  $y (\text{Vec } a \ b) = b$ . Mostre então que o facto

$$\langle x, y \rangle \cdot (\text{uncurry Vec}) = \text{id} \quad (7)$$

se verifica, em que (como se viu na ficha anterior)  $\text{uncurry } f (a, b) = f \ a \ b$ . **Sugestão:** comece por mostrar as igualdades  $x \cdot (\text{uncurry Vec}) = \pi_1$  e  $y \cdot (\text{uncurry Vec}) = \pi_2$ .

(b) Considere a função que multiplica um escalar por um vector definida da forma seguinte:

```
mul s = uv \ ((s*) \times (s*)) \cdot \langle x, y \rangle
where uv = uncurry Vec
```

Mostre que a correspondente definição *ao ponto* (i.é, com variáveis) é

$$\text{mul } s (\text{Vec } a \ b) = \text{Vec } (s * a) (s * b)$$