Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2013/14

Teste — 13 de Junho de 2014
18h00
Salas CP2 201, 202, 203 e 204

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Este teste consta de **10** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos que entregaram o **miniteste** só podem responder à parte II (questões 7, 8, 9 e 10), devendo entregar a prova ao fim de uma hora.*
- *Os restantes alunos devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas e meia.*

PROVA SEM CONSULTA (60m / 2h30m)

Parte I

Questão 1 Identifique a função iso que testemunha o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} 1+(A+B) \arrow[rr, bend left, "\mathsf{iso}^\circ"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & (B+A)+1 \arrow[ll, bend left, "\mathsf{iso}"] \end{tikzcd}$$

e calcule k sabendo que $\mathsf{iso} = [i_2 \,, i_1] \cdot k$.

RESOLUÇÃO: $\mathsf{iso} = (! + \mathsf{coswap}) \cdot \mathsf{coswap}$, cf.

$$(B+A)+1 \xrightarrow{\mathsf{coswap}} 1+(B+A) \xrightarrow{! + \mathsf{coswap}} 1+(A+B)$$

Cálculo de k:

$$\begin{array}{ll}
& [i_2 \,, i_1] \cdot k = \mathsf{iso} \\
\equiv & \quad \{ \; [i_2 \,, i_1] = \mathsf{coswap} \; \} \\
& \mathsf{coswap} \cdot k = (! + \mathsf{coswap}) \cdot \mathsf{coswap} \\
\equiv & \quad \{ \; \text{natural-coswap} \; \} \\
& \mathsf{coswap} \cdot k = \mathsf{coswap} \cdot (\mathsf{coswap} + !) \\
\equiv & \quad \{ \; \text{coswap cancela nos dois lados da igualdade por ser um isomorfismo} \; \} \\
& k = (\mathsf{coswap} + !) \\
\Box &
\end{array}$$

Logo, $k = (\mathsf{coswap} + !)$. $\Box$

Questão 2 Sejam dadas as funções

$$\begin{aligned}
&\alpha = [\delta\ , \delta] \\
&\delta = \langle id, id\rangle \\
&\beta = \langle \gamma, \gamma\rangle \\
&\gamma = [id\ , id]
\end{aligned}$$

- Infira, através de um diagrama, a propriedade *natural* (ie. "grátis'") da função α.
- Mostre que α e β são a mesma função.

RESOLUÇÃO: Por substituição ter-se-á $\alpha = [\langle id, id\rangle\ , \langle id, id\rangle]$, logo o tipo $A \times A \xleftarrow{\alpha} A + A$ e daí a propriedade natural

$$(f \times f) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + f)$$

que se extrai do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[d, "f \times f"'] & A + A \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+f"] \\
A \times A & A + A \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Segunda alínea:

$$\begin{aligned}
&\alpha \\
= &\quad \{ \text{ Definições de } \alpha \text{ e } \delta \ \} \\
&[\langle id, id\rangle\ , \langle id, id\rangle] \\
= &\quad \{ \text{ lei da troca (28) } \} \\
&\langle [id\ , id], [id\ , id]\rangle \\
= &\quad \{ \text{ def. de } \gamma \ \} \\
&\langle \gamma, \gamma\rangle \\
= &\quad \{ \text{ def. de } \beta \ \} \\
&\beta
\end{aligned}$$

$\square$

$\square$

Questão 3 Sendo $\neg :: Bool \rightarrow Bool$ o operador booleano de negação e definindo-se as funções $true = \underline{\mathsf{True}}$ e $false = \underline{\mathsf{False}}$, ter-se-á:

$$(\neg\ p)? = \mathsf{coswap} \cdot (p?) \tag{E1}$$

$$true? = i_1 \tag{E2}$$

$$false? = i_2 \tag{E3}$$

Recorrendo ao cálculo de condicionais de McCarthy mostre que a expressão

$$(\neg\ p) \rightarrow (\neg\ false \rightarrow f, g), h$$

se pode reduzir a $p \rightarrow h, f$.

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
& (\neg\, p) \rightarrow (\neg\, \mathit{false} \rightarrow f, g), h \\
\equiv & \quad \{\ \text{def. (54) ; (E1) ; } \mathsf{coswap} = [i_2\ , i_1]\ \} \\
& [(\neg\, \mathit{false} \rightarrow f, g)\ , h] \cdot [i_2\ , i_1] \cdot p? \\
\equiv & \quad \{\ \text{fusão-+ (20) ; cancelamento-+ (18)}\ \} \\
& [h\ , (\neg\, \mathit{false} \rightarrow f, g)] \cdot p? \\
\equiv & \quad \{\ \text{def. (54)}\ \} \\
& [h\ , [f\ , g] \cdot (\neg\, \mathit{false})?] \cdot p? \\
\equiv & \quad \{\ \text{(E1)}\ \} \\
& [h\ , [f\ , g] \cdot (\mathsf{coswap} \cdot i_2)] \cdot p? \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{coswap} = [i_2\ , i_1] \text{ ; cancelamento-+ (18)}\ \} \\
& [h\ , [f\ , g] \cdot i_1]) \cdot p? \\
\equiv & \quad \{\ \text{cancelamento-+ (18) ; def. (54)}\ \} \\
& p \rightarrow h, f \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 4 Considere o isomorfismo célebre entre exponenciais

$$
\begin{tikzcd}
C \times B \rightarrow A \arrow[rr, bend left, "\mathsf{curry}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & C \rightarrow A^B \arrow[ll, bend left, "\mathsf{uncurry}"]
\end{tikzcd}
$$

que conhece, para o qual são dadas as definições:

$$\mathsf{uncurry}\ k = \mathsf{ap} \cdot (k \times id) \tag{E4}$$

$$\mathsf{curry}\ f = \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \cdot \overline{id} \tag{E5}$$

Recorrendo às leis da exponenciação, apresente justificações para os seguintes passos da demonstração da igualdade $\mathsf{uncurry} \cdot \mathsf{curry} = id$:

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{uncurry} \cdot \mathsf{curry} = id \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{uncurry}\ (\mathsf{curry}\ f) = f \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{ap} \cdot ((\overline{f \cdot \mathsf{ap}} \cdot \overline{id}) \times id) = f \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\overline{f \cdot \mathsf{ap}} \times id) \cdot (\overline{id} \times id) = f \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& f \cdot \mathsf{ap} \cdot (\overline{id} \times id) = f
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot id = f \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{uncurry} \cdot \mathsf{curry} = id \\
\equiv & \{ \ (71) \ \} \\
& \mathsf{uncurry}\ (\mathsf{curry}\ f) = f \\
\equiv & \{ \ (E4)\ ;\ (E5) \ \} \\
& \mathsf{ap} \cdot ((\overline{f \cdot \mathsf{ap} \cdot \overline{id}}) \times id) = f \\
\equiv & \{ \ \text{natural-}id;\ (10) \ \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\overline{f \cdot \mathsf{ap}} \times id) \cdot (\overline{id} \times id) = f \\
\equiv & \{ \ (30) \ \} \\
& f \cdot \mathsf{ap} \cdot (\overline{id} \times id) = f \\
\equiv & \{ \ (30) \ \} \\
& f \cdot id = f \\
\equiv & \{ \ \text{natural-}id \ \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 5 Seja $(a*)$ o catamorfismo de naturais

$$(a*) = (\![[\underline{0}\ , (a+)]]\!) \tag{E6}$$

Recorrendo às leis de cancelamento e fusão de catamorfismos, mostre que a função $f\ n = a * (n+1)$, isto é,

$$f = (a*) \cdot \mathsf{succ} \tag{E7}$$

é o catamorfismo

$$f = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!) \tag{E8}$$

RESOLUÇÃO: Como estamos em naturais, temos $\mathsf{F}\ X = 1 + X$ e $\mathbf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$:

$$
\begin{array}{ll}
& (a*) \cdot \mathsf{succ} = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!) \\
\equiv & \{ \ \mathbf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}];\ \text{cancelamento-+}\ (18) \ \} \\
& (a*) \cdot (\mathbf{in} \cdot i_2) = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!)
\end{array}
$$

$\equiv$ { cancelamento-cata ($\mathsf{F}\, f = id + f$) }

$[\underline{0}\,, (a+)] \cdot (id + (a*)) \cdot i_2 = (\!|[\underline{a}\,, (a+)]|\!)$

$\equiv$ { natural-i_2 (24) seguido de cancelamento-+ (18) }

$(a+) \cdot (a*) = (\!|[\underline{a}\,, (a+)]|\!)$

$\Leftarrow$ { fusão-cata (40) }

$(a+) \cdot (\!|[\underline{0}\,, (a+)]|\!) = [\underline{a}\,, (a+)] \cdot (id + (a+))$

$\equiv$ { fusão-+ (20) ; absorção-+ (21); eq-+ (27) }

$$\begin{cases} (a+) \cdot \underline{0} = \underline{a} \\ (a+) \cdot (a+) = (a+) \cdot (a+) \end{cases}$$

$\equiv$ { (4) }

$$\begin{cases} \underline{a + 0} = \underline{a} \\ \mathit{true} \end{cases}$$

$\equiv$ { $a + 0 = a$ }

true

$\square$

$\square$

Questão 6 O *standard Haskell Prelude* inclui a função

$$\begin{array}{l} \mathit{takewhile} :: (a \to \mathit{Bool}) \to [\,a\,] \to [\,a\,] \\ \mathit{takewhile}\ p\ [\,] = [\,] \\ \mathit{takewhile}\ p\ (h : t) \\ \quad \mid p\ h = h : \mathit{takewhile}\ p\ t \\ \quad \mid \mathit{otherwise} = [\,] \end{array}$$

que extrai o maior prefixo da lista argumento que satisfaz a condição p, por exemplo $\mathit{takewhile}\ \mathit{even}\ [2, 6, 1] = [2, 6]$ e $\mathit{takewhile}\ \mathit{odd}\ [2, 6, 1] = [\,]$.

Sabendo-se que esta função se pode escrever como o catamorfismo de listas

$$\mathit{takewhile}\ p = (\!|[\mathsf{nil}\,, p \cdot \pi_1 \to \mathsf{cons}, \mathsf{nil}]|\!) \tag{E9}$$

onde $\mathsf{nil}\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$, demonstre a igualdade

$$\mathit{takewhile}\ \mathit{false} = \mathsf{nil}$$

onde o predicado $\mathit{false} = \underline{\mathsf{False}}$ é tal que $\mathit{false}? = i_2$.

RESOLUÇÃO:

$\mathit{takewhile}\ \mathit{false} = \mathsf{nil}$

$\equiv$ { (E9) }

$(\!|[\mathsf{nil}\,, \mathit{false} \cdot \pi_1 \to \mathsf{cons}, \mathsf{nil}]|\!) = \mathsf{nil}$

$\equiv$ { $\mathit{false} \cdot \pi_1 = \mathit{false}$ pois $\mathit{false} \cdot \pi_1 = \underline{\mathsf{False}} \cdot \pi_1 = \underline{\mathsf{False}} = \mathit{false}$ }

$(\!|[\mathsf{nil}\,, \mathit{false} \to \mathsf{cons}, \mathsf{nil}]|\!) = \mathsf{nil}$

$\equiv$ { $\mathit{false}? = i_2$, logo $\mathit{false} \to f, g = [f\,, g] \cdot i_2 = g$ }

$(\!|[\mathsf{nil}\,, \mathsf{nil}]|\!) = \mathsf{nil}$

$$\equiv \quad \{ \text{ fusão-+ (20) e função constante (4) } \}$$

$$(\!|\mathsf{nil}|\!) = \mathsf{nil}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ universal-cata } \}$$

$$\mathsf{nil} \cdot \mathsf{in} = \mathsf{nil} \cdot (\mathsf{F}\ \mathsf{nil})$$

$$\equiv \quad \{ \text{ nil é função constante (4) } \}$$

$$\mathsf{nil} = \mathsf{nil}$$

□

□

Parte II

Questão 7 A função

$$\begin{array}{l} chop :: Int \rightarrow [\,a\,] \rightarrow [\,[\,a\,]\,] \\ chop\ n\ [\,] = [\,] \\ chop\ n\ s = (\mathsf{take}\ n\ s) : chop\ n\ (\mathsf{drop}\ n\ s) \end{array}$$

divide uma lista em tantas sublistas de tamanho n quanto possível, por exemplo.

$$chop\ 4\ [1\,..\,10] = [[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10]]$$

Partindo da versão *pointfree* de $chop\ n$ que se segue,

$$chop\ n = empty \rightarrow \mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot \langle \mathsf{take}\ n, (chop\ n) \cdot (\mathsf{drop}\ n)\rangle \tag{E10}$$

onde $empty\ s = (s \equiv [\,])$, mostre que $chop\ n$ é o anamorfismo de listas

$$chop\ n = [\!(g\ n)\!] \tag{E11}$$

tal que $g\ n = empty \rightarrow (i_1 .!), i_2 \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n\rangle$.

RESOLUÇÃO: Partindo de (E11):

$$chop\ n = [\!(g\ n)\!]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ universal-ana } \}$$

$$\mathsf{out} \cdot (chop\ n) = (id + id \times (chop\ n)) \cdot (g\ n)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ isomorfismo } \mathsf{out} = \mathsf{in}^{\circ} \text{ ; definição de } g\ n \ \}$$

$$chop\ n = \mathsf{in} \cdot (id + id \times (chop\ n)) \cdot (empty \rightarrow (i_1 .!), i_2 \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n\rangle)$$

$$\equiv \quad \{ \ \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}] \text{ ; absorção-+ (21) } \}$$

$$chop\ n = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons} \cdot (id \times (chop\ n))] \cdot (empty \rightarrow (i_1 .!), i_2 \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n\rangle)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ (55) ; cancelamento-+ (18) ; } \mathsf{nil} \cdot ! = \mathsf{nil} \ \}$$

$$chop\ n = empty \rightarrow \mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (id \times (chop\ n)) \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n\rangle$$

$$\equiv \quad \{ \text{ absorção-} \times \text{ (10) } \}$$

$$chop\ n = empty \rightarrow \mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot \langle \mathsf{take}\ n, (chop\ n) \cdot (\mathsf{drop}\ n)\rangle$$

□

Questão 8 A função concat, extraída do *Prelude* do Haskell, é o catamorfismo de listas

$$\mathsf{concat} = (\![\mathsf{nil}\ ,\mathsf{conc}]\!) \tag{E12}$$

onde conc $(x, y) = x +\!\!+ y$ e nil $\_ = [\,]$. Mostre que a propriedade

$$\mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = \mathsf{sum} \cdot \mathsf{map\ length} \tag{E13}$$

se verifica, recorrendo às leis de *fusão*- e *absorção*-cata

$$\begin{array}{rcl} f \cdot (\!|h|\!) = (\!|k|\!) & \Leftarrow & f \cdot h = k \cdot (\mathsf{F}\ f) \\ (\!|h|\!) \cdot \mathsf{T}\ f & = & (\!|h \cdot \mathsf{B}\ (f, id)|\!) \end{array}$$

em que, para listas, se tem $\mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g$, $\mathsf{F}\ f = \mathsf{B}\ (id, f)$ e $\mathsf{T}\ f = \mathsf{map}\ f$.

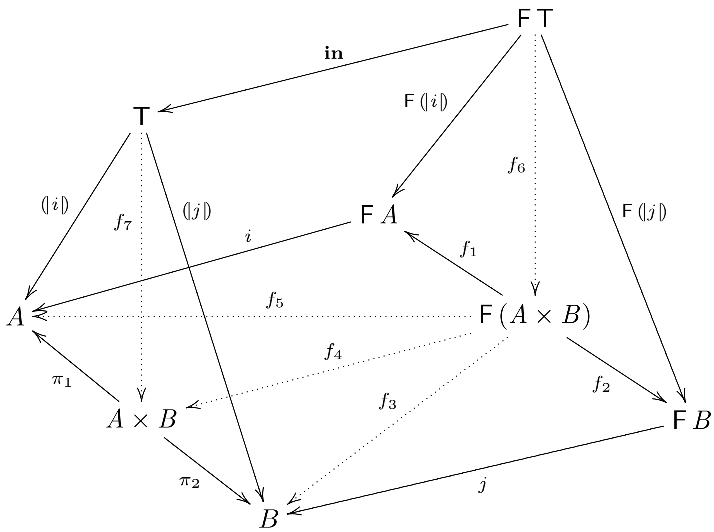
RESOLUÇÃO:

$$\begin{array}{cl}
& \mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = \mathsf{sum} \cdot \mathsf{map\ length} \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{sum} = (\![\underline{0}\ ,\mathsf{add}]\!)\ ;\ \mathsf{map}\ f = \mathsf{T}\ f \text{ para listas}\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = (\![\underline{0}\ ,\mathsf{add}]\!) \cdot (\mathsf{T\ length}) \\
\equiv & \quad \{\ \text{absorção-cata no lado direito}\ ;\ \mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = (\![\underline{0}\ ,\mathsf{add}] \cdot (id + \mathsf{length} \times id)]\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{(E12)}\ ;\ \text{fusão-+ (20) no lado direito}\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot (\![\mathsf{nil}\ ,\mathsf{conc}]\!) = (\![\underline{0}\ ,\mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times id)]]\!) \\
\Leftarrow & \quad \{\ \text{fusão-cata (40)}\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot [\mathsf{nil}\ ,\mathsf{conc}] = [\underline{0}\ ,\mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times id)] \cdot (id + id \times \mathsf{length}) \\
\equiv & \quad \{\ \text{fusão-+ (20), absorção-+ (21) e eq-+ (27)}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{length} \cdot \mathsf{nil} = \underline{0} \\ \mathsf{length} \cdot \mathsf{conc} = \mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times id) \cdot (id \times \mathsf{length}) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{length}\ [\,] = 0\ ;\ \text{functor-}\times\ (14)\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot \mathsf{conc} = \mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times \mathsf{length}) \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{length}\ (x +\!\!+ y) = (\mathsf{length}\ x) + (\mathsf{length}\ y)\ \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 9 Atente no diagrama da lei de "banana-split" (44) que ao lado se apresenta, onde T é um tipo indutivo genérico definido sobre o functor F.

- Identifique as funções f_1, f_2, ... f_6 que encaixam no diagrama.
- Há duas maneiras de escrever f_7: identifique-as e deduza a lei (44) a partir delas.



RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \mathsf{F}\,\pi_1\\
f_2 &= \mathsf{F}\,\pi_2\\
f_5 &= i \cdot \mathsf{F}\,\pi_1\\
f_3 &= j \cdot \mathsf{F}\,\pi_2\\
f_4 &= \langle i \cdot \mathsf{F}\,\pi_1, j \cdot \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle\\
f_6 &= \mathsf{F}\,f_7
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
f_7 &= \langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle\\
f_7 &= \llparenthesis f_4 \rrparenthesis
\end{aligned}$$

Tem-se assim, de imediato:

$$\langle \llparenthesis i \rrparenthesis, \llparenthesis j \rrparenthesis \rangle = \llparenthesis \langle i \cdot \mathsf{F}\,\pi_1, j \cdot \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle \rrparenthesis$$

$\square$

Questão 10 Qualquer algoritmo h é um hilomorfismo da forma $h = \llparenthesis g \rrparenthesis \cdot \llbracket f \rrbracket$ satisfazendo a propriedade:

$$h = g \cdot (\mathsf{F}\,h) \cdot f \tag{E14}$$

Recorra a (E14) para mostrar que concat (E12) é inversa de $chop\ n$ (E11), isto é, que

$$\mathsf{concat} \cdot (chop\ n) = id \tag{E15}$$

se verifica qualquer que seja n. **NB:** assuma a seguinte propriedade válida para as funções take e drop do Haskell:

$$(\mathsf{take}\ n\ x) +\!\!+ (\mathsf{drop}\ n\ x) = x \tag{E16}$$

RESOLUÇÃO:

$$id = \mathsf{concat} \cdot (chop\ n)$$

$\equiv$ $\{$ concat (E12) e $chop\ n$ (E11) $\}$

$id = (\![\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}]\!) \cdot [\![(g\ n)]\!]$

$\equiv$ $\{$ (E14) $\}$

$id = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}] \cdot (\mathsf{F}\ id) \cdot (g\ n)$

$\equiv$ $\{$ (52); definição de $g\ n$ $\}$

$id = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{conc}] \cdot (empty \rightarrow i_1 \cdot !, (i_2 \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n \rangle))$

$\equiv$ $\{$ (55) ; cancelamento-+ (18) ; $\mathsf{nil} \cdot ! = \mathsf{nil}$ $\}$

$id = empty \rightarrow \mathsf{nil}, \mathsf{conc} \cdot \langle \mathsf{take}\ n, \mathsf{drop}\ n \rangle$

$\equiv$ $\{$ (E16) em versão *pointfree* $\}$

$id = empty \rightarrow \mathsf{nil}, id$

$\equiv$ $\{$ introdução de variáveis $\}$

$x = \mathbf{if}\ x \equiv [\,]\ \mathbf{then}\ x\ \mathbf{else}\ x$

$\equiv$ $\{$ $p \rightarrow f, f = f$ $\}$

$true$

$\square$

$\square$
