Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2013/14

Miniteste — 15 de Maio de 2014
09h00
Salas 201, 202 e 203 do CP2

---

*Este miniteste consta de **6** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (90m)

Questão 1 Infira o tipo genérico da função

$$\mathsf{coxr} = [i_1 + id\ , i_1 \cdot i_2] \tag{E1}$$

e, a partir dele, a sua propriedade **natural** ("grátis") usando um diagrama. Confirme essa propriedade fazendo a respectiva demonstração analítica.

RESOLUÇÃO: A resolução que se propõe pode ser acompanhada de diagramas:

- Lado esquerdo de coxr:
  - Sejam assumidos os tipos genéricos elementares $i_1 : A \to A + B$ e $id : C \to C$
  - Ter-se-á então $(i_1 + id) : (A + C) \to ((A + B) + C$
- Lado direito de coxr:
  - Sejam assumidos os tipos genéricos elementares $i_1 : D \to D + E$ e $i_2 : J \to K + J$
  - Ter-se-á então $(i_1 \cdot i_2) : J \to (K + J) + E$
- Finalmente, a alternativa força a unificação dos respectivos tipos de saída: $A = K$, $B = J$, $C = E$, obtendo-se:

  $$[i_1 + id\ , i_1 \cdot i_2] : (A + C) + B \to (A + B) + C$$

Propriedade natural:

$$\begin{tikzcd}
(A + B) + C \arrow[d, "(f+g)+h"'] & (A + C) + B \arrow[l, "\mathsf{coxr}"'] \arrow[d, "(f+h)+g"] \\
(A' + B') + C' & (A' + C') + B' \arrow[l, "\mathsf{coxr}"]
\end{tikzcd}$$

Demonstração analítica:

$$\begin{array}{ll}
& ((f + g) + h) \cdot \mathsf{coxr} = \mathsf{coxr} \cdot ((f + h) + g) \\
\equiv & \quad \{\ \text{(E1) duas vezes}\ \} \\
& ((f + g) + h) \cdot [i_1 + id\ , i_1 \cdot i_2] = [i_1 + id\ , i_1 \cdot i_2] \cdot ((f + h) + g) \\
\equiv & \quad \{\ \text{(20), (21), (25), (1)}\ \} \\
& [((f + g) \cdot i_1) + h\ , ((f + g) + h) \cdot i_1 \cdot i_2] = [(i_1 \cdot f) + h\ , i_1 \cdot i_2 \cdot g]
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\equiv\quad & \{\ \text{(23) duas vezes}\ \} \\
& [(i_1 \cdot f) + h\ , i_1 \cdot (f+g) \cdot i_2] = [(i_1 \cdot f) + h\ , i_1 \cdot i_2 \cdot g] \\
\equiv\quad & \{\ \text{(27)}\ \} \\
& i_1 \cdot (f+g) \cdot i_2 = i_1 \cdot i_2 \cdot g \\
\equiv\quad & \{\ \text{(24)}\ \} \\
& i_1 \cdot i_2 \cdot g = i_1 \cdot i_2 \cdot g \\
\equiv\quad & \{\ \text{toda a função é igual a ela própria}\ \} \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

□

□

Questão 2 Demonstre a lei do condicional

$$p \rightarrow (q \rightarrow c, d), c \quad = \quad (p \Rightarrow q) \rightarrow c, d$$

sabendo que

$$(p \Rightarrow q)? \quad = \quad p \rightarrow q?, i_1 \tag{E2}$$

é uma propriedade da implicação de predicados.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á, pegando no lado direito da igualdade a provar:

$$
\begin{aligned}
& (p \Rightarrow q) \rightarrow c, d \\
=\quad & \{\ \text{(54) seguida de (E2)}\ \} \\
& [c\ , d] \cdot (p \rightarrow q?, i_1) \\
=\quad & \{\ \text{fusão (55)}\ \} \\
& p \rightarrow ([c\ , d] \cdot q?), ([c\ , d] \cdot i_1) \\
=\quad & \{\ \text{(54) ao mesmo tempo que (18)}\ \} \\
& p \rightarrow (q \rightarrow c, d), c
\end{aligned}
$$

□

□

Questão 3 Sabendo que uma dada função xr satisfaz a propriedade

$$\mathsf{xr} \cdot \langle\langle f, g\rangle, h\rangle = \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \tag{E3}$$

para todo o f, g e h, derive a partir de (E3) a definição de xr:

$$\mathsf{xr} = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle \tag{E4}$$

RESOLUÇÃO: (E3) reduz-se a (E4) se $\langle\langle f, g\rangle, h\rangle = id$, pois $\mathsf{xr} \cdot id = \mathsf{xr}$. O objectivo é então resolver $id = \langle\langle f, g\rangle, h\rangle$ em ordem a f, g e h:

$$
\begin{aligned}
& id = \langle\langle f, g\rangle, h\rangle \\
\equiv \quad & \{ \ (6) \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = \langle f, g\rangle \\ \pi_2 \cdot id = h \end{array} \right. \\
\equiv \quad & \{ \ (6) \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \pi_1 = f \\ \pi_2 \cdot \pi_1 = g \end{array} \right. \\ \pi_2 = h \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Logo $\langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle, \pi_2\rangle = id$. Substituindo em (E3) ter-se-á:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{xr} \cdot \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle, \pi_2\rangle = \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2\rangle, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle \\
\equiv \quad & \{ \ \text{como se viu acima; } \pi_2 = id \cdot \pi_2 \ \} \\
& \mathsf{xr} = \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, id \cdot \pi_2\rangle, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle \\
\equiv \quad & \{ \ (11) \ \} \\
& \mathsf{xr} = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle
\end{aligned}
$$

como queríamos deduzir. $\square$

Questão 4 Considere o isomorfismo de exponenciais

$$
\begin{tikzcd}
(B \times C)^A \arrow[r, bend left, "\mathsf{unpair}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & B^A \times C^A \arrow[l, bend left, "\mathsf{pair}"]
\end{tikzcd}
\tag{E5}
$$

onde

$\mathsf{pair}\ (f, g) = \langle f, g\rangle$
$\mathsf{unpair}\ k = (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)$

Mostre que $\mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair} = id$ e que $\mathsf{unpair} \cdot \mathsf{pair} = id$.

RESOLUÇÃO: Demonstração de $\mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair} = id$:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair} = id \\
\equiv \quad & \{ \ (71), \text{ para qualquer } k \ \} \\
& (\mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair})\ k = id\ k \\
\equiv \quad & \{ \ (72)\ ;\ (73) \ \} \\
& \mathsf{pair}\ (\mathsf{unpair}\ k) = k \\
\equiv \quad & \{ \ \text{def unpair dada no enunciado} \ \} \\
& \mathsf{pair}\ (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k) = k \\
\equiv \quad & \{ \ \text{def pair dada no enunciado} \ \} \\
& \langle \pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k\rangle = k
\end{aligned}
$$

$\equiv$ { (6) }

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = \pi_1 \cdot k \\ \pi_2 \cdot k = \pi_2 \cdot k \end{array} \right.$$

$\equiv$ { qualquer função é igual a si própria }

$true$

$\square$

Demonstração de $\mathsf{unpair} \cdot \mathsf{pair} = id$ (abreviando os passos que são semelhantes ao que já se fez):

$\mathsf{unpair} \cdot \mathsf{pair} = id$

$\equiv$ { tal como acima }

$\mathsf{unpair}\ (\mathsf{pair}\ (f, g)) = (f, g)$

$\equiv$ { definições de pair e unpair dadas no enunciado }

$(\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle, \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle) = (f, g)$

$\equiv$ { (7) }

$(f, g) = (f, g)$

$\equiv$ { qualquer função é igual a si própria }

$true$

$\square$

$\square$

Questão 5 Considere a função $(a*) = \mathsf{for}\ (a+)\ 0$, isto é, $(a*)$ é o catamorfismo

$$(a*) = (\![[\underline{0}\ , (a+)]]\!) \tag{E6}$$

sobre os naturais, isto é, tal que $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{F}\ X = 1 + X$. Definindo

$$f = (a+) \cdot (a*) \tag{E7}$$

mostre que f pode ser re-definida directamente sob a forma:

$$f = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!) \tag{E8}$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

$f = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!)$

$\equiv$ { (E7) e (E6) }

$(a+) \cdot (\![[\underline{0}\ , (a+)]]\!) = (\![[\underline{a}\ , (a+)]]\!)$

$\Leftarrow$ { fusão-cata (40) , cf. $\mathsf{F}\ f = id + f$ }

$(a+) \cdot [\underline{0}\ , (a+)] = [\underline{a}\ , (a+)] \cdot (id + (a+))$

$\equiv$ { (20) no lado esquerdo e (21) no lado direito }

$[(a+) \cdot \underline{0}\ , (a+) \cdot (a+)] = [\underline{a}\ , (a+) \cdot (a+)]$

$\equiv$ { (27) }

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+) \cdot \underline{0} = \underline{a} \\ (a+) \cdot (a+) = (a+) \cdot (a+) \end{array} \right.$$

$\equiv \qquad \{ \text{ (4) } \}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a+0} = \underline{a} \\ \mathit{true} \end{array} \right.$$

$\equiv \qquad \{ \text{ axioma da adição: } a + 0 = a \}$

true

$\Box$

$\Box$

Questão 6 Sendo dada a função seguinte,

$$f\ a\ [\,] = 1$$
$$f\ a\ (x : t) = x^a \times (f\ a\ t)$$

escrita em Haskell:

- Mostre que

$$f\ a \quad = \quad (\![[\mathsf{one}\ , \mathsf{mul} \cdot ((\mathit{exp}\ a) \times \mathit{id})]]\!) \tag{E9}$$

onde

$$\mathsf{one} = \underline{1}$$
$$\mathsf{mul}\ (x, y) = x \times y$$
$$\mathit{exp}\ a\ x = x^a$$

e o catamorfismo (E9) é de listas, isto é, tem padrão de recursividade $\mathsf{F}\ f = \mathit{id} + \mathit{id} \times f$.

- Definindo

$$\mathit{prod} = (\![[\mathsf{one}\ , \mathsf{mul}]]\!) \tag{E10}$$

aplique a propriedade de fusão-cata na demonstração da igualdade

$$f\ a \quad = \quad (\mathit{exp}\ a) \cdot \mathit{prod} \tag{E11}$$

NB: não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

RESOLUÇÃO: Desenvolvendo (E9):

$f\ a = (\![[\mathsf{one}\ , \mathsf{mul} \cdot ((\mathit{exp}\ a) \times \mathit{id})]]\!)$

$\equiv \qquad \{ \text{ (37) } \}$

$(f\ a) \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{one}\ , \mathsf{mul} \cdot ((\mathit{exp}\ a) \times \mathit{id})] \cdot (\mathit{id} + \mathit{id} \times (f\ a))$

$\equiv \qquad \{ \text{ } \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}] \text{ (listas) ; (21), (14), (1) } \}$

$(f\ a) \cdot [\mathsf{nil}\ , \mathsf{cons}] = [\mathsf{one}\ , \mathsf{mul} \cdot ((\mathit{exp}\ a) \times (f\ a))]$

$\equiv \qquad \{ \text{ (20), (27) } \}$

$$\left\{\begin{array}{l}(f\ a)\cdot \mathsf{nil} = \mathsf{one}\\(f\ a)\cdot \mathsf{cons} = \mathsf{mul}\cdot((exp\ a)\times(f\ a))\end{array}\right.$$

$\equiv$ { (4) ; (71); (72) }

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{f\ a\ [\,]} = \underline{1}\\f\ a\ (\mathsf{cons}\ (x,t)) = \mathsf{mul}\ ((exp\ a)\times(f\ a))\ (x,t)\end{array}\right.$$

$\equiv$ { $\mathsf{cons}\ (x,t) = x : t$; (77) }

$$\left\{\begin{array}{l}f\ a\ [\,] = 1\\f\ a\ (x:t) = \mathsf{mul}\ (exp\ a\ x, f\ a\ t)\end{array}\right.$$

$\equiv$ { definições de $exp\ a$ e de mul }

$$\left\{\begin{array}{l}f\ a\ [\,] = 1\\f\ a\ (x:t) = x^a\times f\ a\ t\end{array}\right.$$

□

Demonstração de (E11):

$$f\ a = (exp\ a)\cdot prod$$

$\equiv$ { definições (E10) e (E11) }

$$(\![\mathsf{one}\ ,\mathsf{mul}\cdot((exp\ a)\times id)]\!) = (exp\ a)\cdot(\![\mathsf{one}\ ,\mathsf{mul}]\!)$$

$\Leftarrow$ { fusão-cata (40), cf. $\mathsf{F}\,f = id + id\times f$ }

$$(exp\ a)\cdot[\mathsf{one}\ ,\mathsf{mul}] = [\mathsf{one}\ ,\mathsf{mul}\cdot((exp\ a)\times id)]\cdot(id + id\times(exp\ a))$$

$\equiv$ { (20), (21), (11), (1) }

$$[(exp\ a)\cdot\mathsf{one}\ ,(exp\ a)\cdot\mathsf{mul}] = [\mathsf{one}\ ,\mathsf{mul}\cdot((exp\ a)\times(exp\ a))]$$

$\equiv$ { (27) }

$$\left\{\begin{array}{l}(exp\ a)\cdot\mathsf{one} = \mathsf{one}\\(exp\ a)\cdot\mathsf{mul} = \mathsf{mul}\cdot((exp\ a)\times(exp\ a))\end{array}\right.$$

$\equiv$ { (4); $a^1 = 1$ é uma lei da exponenciação de números ; (71); (72) }

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{a^1} = \underline{1}\\(exp\ a)\ b\times c = (exp\ a\ b)\times(exp\ a\ c)\end{array}\right.$$

$\equiv$ { }

$$\left\{\begin{array}{l}true\\(b\times c)^a = b^a\times c^a\end{array}\right.$$

$\equiv$ { pois $(b\times c)^a = b^a\times c^a$ é uma lei da exponenciação de números }

$$true$$

□

□