Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2012/13 - Ficha nr.° 9

1. Seja dada a função seguinte, em Haskell:

$$\begin{array}{l}\mathsf{sumprod}\ a\ [\,] = 0\\ \mathsf{sumprod}\ a\ (h : t) = a * h + \mathsf{sumprod}\ a\ t\end{array}$$

   (a) Mostre que

$$\mathsf{sumprod}\ a \quad = \quad (\![\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]\!) \tag{1}$$

   onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$, $\mathsf{add} = \widehat{(+)}$ e o catamorfismo é de listas, isto é, tem padrão de recursividade $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$.

   (b) Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de fusão-cata para listas, que

$$\mathsf{sumprod}\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \tag{2}$$

   onde $\mathsf{sum} = (\![\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

2. Como sabe, a função

$$\begin{array}{l}\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,]\\ \mathsf{map}\ f\ (h : t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t\end{array}$$

   é o catamorfismo de listas

$$\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$$

   Mostre, usando as leis de reflexão e fusão-cata (entre outras), que as seguintes propriedades se verificam:

$$\mathsf{map}\ id \quad = \quad id \tag{3}$$

$$(\mathsf{map}\ f) \cdot (\mathsf{map}\ g) \quad = \quad \mathsf{map}\ (f \cdot g) \tag{4}$$

3. Mostre que a função $f = look\ k$ onde

$$\begin{array}{l} look :: \mathsf{Eq}\ a \Rightarrow a \rightarrow [(a, b)] \rightarrow \mathsf{Maybe}\ b\\ look\ k\ [\,] = \mathsf{Nothing}\\ look\ k\ ((a, b) : r)\\ \quad \mid a \equiv k = \mathsf{Just}\ b\\ \quad \mid otherwise = look\ k\ r\end{array}$$

   é um catamorfismo de listas.

4. Considere o tipo das árvores binárias com informação nas folhas

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

e a função

$$\begin{array}{l} \mathsf{mirror}\ (\mathsf{Leaf}\ a) = \mathsf{Leaf}\ a \\ \mathsf{mirror}\ (\mathsf{Fork}\ (x, y)) = \mathsf{Fork}\ (\mathsf{mirror}\ y, \mathsf{mirror}\ x) \end{array}$$

que "espelha" árvores binárias desse tipo.

(a) Mostre que

$$\mathsf{mirror} = (\!| inLTree \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) \tag{5}$$

onde

$$inLTree = [\mathsf{Leaf}\ , \mathsf{Fork}] \tag{6}$$

(b) Desenhe o digrama que representa o catamorfisno mirror.

(c) É fácil provar que mirror é um isomorfismo de árvores mostrando que a função é a sua própria inversa:

$$\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \tag{7}$$

Complete a seguinte demonstração desta propriedade:

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot (\!| inLTree \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) = (\!| inLTree |\!) \\ \Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot \ldots = inLTree \cdot \ldots \\ \ldots & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (etc) \end{array}$$

5. Considere o par de funções

$$\begin{array}{l} f1\ [\,] = [\,] \\ f1\ (h : t) = h : (f2\ t) \\ f2\ [\,] = [\,] \\ f2\ (h : t) = f1\ t \end{array}$$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle f1, f2 \rangle$ como um catamorfismo de listas e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções $f1$ e $f2$?