Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2012/13 - Ficha nr.° 7

1. Considere o diagrama que representa a propriedade universal do combinador *ciclo*-for com inicialização i e corpo de ciclo f:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[d, "k"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in} = [\underline{0}\ ,\mathsf{succ}]"'] \arrow[d, "id+k"] \\ A & 1 + A \arrow[l, "[\underline{i}\ ,f]"] \end{tikzcd} \qquad k = \mathsf{for}\ f\ i \quad \equiv \quad k \cdot \mathsf{in} = [\underline{i}\ ,f] \cdot (id + k) \qquad (1)$$

   (a) Demonstre a lei de reflexão correspondente,

   $\mathsf{for\ succ}\ 0 = id$.

   (b) Mostre que

   $\mathsf{for\ succ}\ 1 = \mathsf{succ}$.

   (c) Mostre que as funções

   $f = \mathsf{for}\ id\ i$

   e

   $g = \mathsf{for}\ (\underline{i})\ i$

   são a mesma função. (Qual?)

2. Na sequência da questão anterior, mostre que a lei de cancelamento para ciclos-for (que se deduz de (1) fazendo a substituição $k := (\mathsf{for}\ f\ \ i)$ e simplificando) se converte no seguinte programa em Haskell:

   $\mathsf{for}\ f\ \ i\ 0 = i$
   $\mathsf{for}\ f\ \ i\ (n+1) = f\ (\mathsf{for}\ f\ \ i\ n)$

3. A função $k = \mathsf{for}\ f\ \ i$ pode ser codificada em sintaxe C escrevendo

```
int k(int n) {
  int r=i;
  int x;
  for (x=1;x<n+1;x++) {r=f(r);}
  return r;
};
```

   Escreva em C as funções f e g da alínea 1c acima, bem como aquela que decorre da lei de reflexão da alínea 1a.

4. O diagrama seguinte representa a lei de **fusão** de ciclos-for,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\mathsf{for}\ f\ i)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}=[\underline{0}\ ,\mathsf{succ}]"'] \arrow[d, "id+(\mathsf{for}\ f\ i)"] \\
A \arrow[d, "h"'] & 1 + A \arrow[l, "{[\underline{i}\ ,f]}"] \arrow[d, "id+h"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "{[\underline{j}\ ,g]}"]
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

que se enuncia assim:

$$
h \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ g\ j \quad \Leftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} h\ i = j \\ h \cdot f = g \cdot h \end{array} \right. \tag{3}
$$

Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$
\begin{array}{cl}
 & h \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ g\ j \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (h \cdot (\mathsf{for}\ f\ i)) \cdot \mathsf{in} = [\underline{j}\ , g] \cdot (id + h \cdot (\mathsf{for}\ f\ i)) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & h \cdot ((\mathsf{for}\ f\ i) \cdot \mathsf{in}) = [\underline{j}\ , g] \cdot (id + h) \cdot (id + (\mathsf{for}\ f\ i)) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & h \cdot [\underline{i}\ , f] \cdot (id + (\mathsf{for}\ f\ i)) = [\underline{j}\ , g] \cdot (id + h) \cdot (id + (\mathsf{for}\ f\ i)) \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & h \cdot [\underline{i}\ , f] = [\underline{j}\ , g] \cdot (id + h) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} h\ i = j \\ h \cdot f = g \cdot h \end{array} \right.
\end{array}
$$

5. Recorra à lei de fusão (3) acima deduzida para demonstrar a propriedade:

$$
f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{4}
$$

Escreva em sintaxe C os programas correspondentes aos dois lados da igualdade.

6. Introduza variáveis na igualdade de funções

$$
(a*) \cdot (b*) \quad = \quad ((a * b)*) \tag{5}
$$

mostrando assim que essa igualdade exprime a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{N}_0$. Sabendo que $(a*)$ = $\mathsf{for}\ (a+)\ 0$, demonstre a validade de (5) usando a lei de fusão (3) acima deduzida. Assuma as propriedades de $+$ e $*$ (sobre $\mathbb{N}_0$) que conhece.