Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2012/13 - Ficha nr.° 2

1. Seja dada a função $\mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$. Faça um diagrama que explique o tipo de swap e mostre, usando o cálculo de programas, que $\mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} = \mathsf{id}$.

2. Apresente justificações para cada um dos passos dados no cálculo que se vai seguir da propriedade

$$\langle i, j \rangle \cdot h \quad = \quad \langle i \cdot h, j \cdot h \rangle$$

que se conhece pelo nome de **fusão**-$\times$. Repare como o cálculo procede resolvendo a equação

$$\langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle$$

em ordem a x e a y:

$$\begin{array}{ll}
& \langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = x \\ \pi_2 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = y \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} (\pi_1 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = x \\ (\pi_2 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = y \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} i \cdot h = x \\ j \cdot h = y \end{array} \right.
\end{array}$$

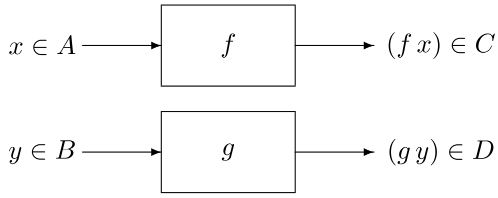
3. Considere uma função d da qual apenas conhece duas propriedades: $\pi_1 \cdot d = \mathsf{id}$ e $\pi_2 \cdot d = \mathsf{id}$. Mostre que essa função é, necessariamente, a mesma que em Programação Funcional escreveria da forma seguinte, em Haskell:

$$\begin{array}{l} d :: a \to (a, a) \\ d\ a = (a, a) \end{array}$$

(Esta função, que duplica um valor, designa-se habitualmente por função *diagonal*.)

4. Identifique os tipos das expressões $\langle \pi_1, \langle \mathsf{id}, \pi_2 \rangle \rangle$ e $\langle \mathsf{id}, \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \rangle$. Como compara este último com o tipo da função d da alínea anterior?

5. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{1}$$

que capta a aplicação *paralela* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$ independentes entre si.

(a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

(b) Sem recorrer à alínea anterior, demonstre as igualdades

$$\mathsf{id} \times \mathsf{id} = \mathsf{id} \tag{2}$$
$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1 \tag{3}$$
$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2 \tag{4}$$

(c) Demonstre a lei de **absorção-**$\times$:

$$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle \tag{5}$$

Sugestão: resolva em ordem a x e y a equação $(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle x, y \rangle$.

6. Considere as funções seguintes:

$$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times \mathsf{id} \rangle$$
$$g = \langle \mathsf{id} \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

(a) Identifique, justificadamente, os seus tipos

(b) Mostre que $f \cdot g = \mathsf{id}$.

7. Considere o seguinte tipo, em Haskell,

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Vec}\ a\ b = \mathsf{Vec}\ \{ x :: a, y :: b \}$$

que lhe permite representar vectores a duas dimensões a e b.

(a) A semântica da linguagem garante-nos, por construção, as igualdades $x\ (\mathsf{Vec}\ a\ b) = a$ e $y\ (\mathsf{Vec}\ a\ b) = b$. Mostre então que o facto

$$\langle x, y \rangle \cdot (\mathsf{uncurry}\ \mathsf{Vec}) = \mathsf{id} \tag{6}$$

se verifica, em que (como se viu na ficha anterior) uncurry $f\ (a, b) = f\ a\ b$. **Sugestão**: comece por mostar as igualdades $x \cdot (\mathsf{uncurry}\ \mathsf{Vec}) = \pi_1$ e $y \cdot (\mathsf{uncurry}\ \mathsf{Vec}) = \pi_2$.

(b) Considere a função que multiplica um escalar por um vector definida da forma seguinte:

$$\begin{array}{l} mul\ s = uv \cdot ((s*) \times (s*)) \cdot \langle x, y \rangle \\ \quad \mathbf{where}\ uv = \mathsf{uncurry}\ \mathsf{Vec} \end{array}$$

Mostre que a correspondente definição *ao ponto* (i.é, com variáveis) é

$$mul\ s\ (\mathsf{Vec}\ a\ b) = \mathsf{Vec}\ (s * a)\ (s * b)$$