

## Cálculo de Funções (2011/12)

### FUNÇÕES

<b>Natural-id</b>	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(1)
<b>Assoc-comp</b>	$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$	(2)
<b>Leibniz</b>	$f \cdot h = g \cdot h \iff f = g$	(3)
<b>Igualdade extensional</b>	$f = g \iff \langle \forall x :: fx = gx \rangle$	(4)

### PRODUTO

<b>Universal-<math>\times</math></b>	$k = \langle f, g \rangle \iff \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(5)
<b>Cancelamento-<math>\times</math></b>	$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$	(6)
<b>Reflexão-<math>\times</math></b>	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{A \times B}$	(7)
<b>Fusão-<math>\times</math></b>	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(8)
<b>Absorção-<math>\times</math></b>	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(9)
<b>Def-<math>\times</math></b>	$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$	(10)
<b>Natural-<math>\pi_1</math></b>	$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$	(11)
<b>Natural-<math>\pi_2</math></b>	$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$	(12)
<b>Functor-<math>\times</math></b>	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) = (g \times i) \cdot (h \times j)$	(13)
<b>Functor-id-<math>\times</math></b>	$id_A \times id_B = id_{A \times B}$	(14)
<b>Eq-<math>\times</math></b>	$\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle \iff f = h \wedge g = k$	(15)

### COPRODUTO

<b>Universal-<math>+</math></b>	$k = [f, g] \iff \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$	(16)
<b>Cancelamento-<math>+</math></b>	$[g, h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g, h] \cdot i_2 = h$	(17)
<b>Reflexão-<math>+</math></b>	$[i_1, i_2] = id_{A+B}$	(18)
<b>Fusão-<math>+</math></b>	$f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(19)
<b>Absorção-<math>+</math></b>	$[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(20)
<b>Def-<math>+</math></b>	$f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$	(21)
<b>Natural-<math>i_1</math></b>	$(i + j) \cdot i_1 = i_1 \cdot i$	(22)
<b>Natural-<math>i_2</math></b>	$(i + j) \cdot i_2 = i_2 \cdot j$	(23)
<b>Functor-<math>+</math></b>	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(24)
<b>Functor-id-<math>+</math></b>	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(25)
<b>Eq-<math>+</math></b>	$[f, g] = [h, k] \iff f = h \wedge g = k$	(26)
<b>Lei da troca</b>	$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] = \langle [f, h], [g, k] \rangle$	(27)

### EXPONENCIAÇÃO

<b>Universal-exp</b>	$k = \bar{f} \iff f = ap \cdot (k \times id)$	(28)
<b>Cancelamento-exp</b>	$f = ap \cdot (\bar{f} \times id)$	(29)
<b>Reflexão-exp</b>	$\overline{ap} = id_{BA}$	(30)

<b>Fusão-exp</b>	$\overline{g \cdot (f \times id)} = \bar{g} \cdot f$	(31)
<b>Absorção-exp</b>	$f^A \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$	(32)
<b>Def-exp</b>	$f^A = \overline{f \cdot ap}$	(33)
<b>Functor-exp</b>	$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$	(34)
<b>Functor-id-exp</b>	$id^A = id$	(35)

## INDUÇÃO

<b>Universal-cata</b>	$k = \langle \beta \rangle \Leftrightarrow k \cdot in = \beta \cdot (F k)$	(36)
<b>Cancelamento-cata</b>	$\langle \alpha \rangle \cdot in = \alpha \cdot F \langle \alpha \rangle$	(37)
<b>Reflexão-cata</b>	$\langle in \rangle = id_{\top}$	(38)
<b>Fusão-cata</b>	$f \cdot \langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle \Leftarrow f \cdot \alpha = \beta \cdot (F f)$	(39)
<b>Absorção-cata</b>	$\langle \alpha \rangle \cdot \top f = \langle \alpha \cdot B(f, id) \rangle$	(40)
<b>Def-map</b>	$\top f = \langle in_{\mathbb{F}} \cdot B(f, id) \rangle$	(41)

## RECURSIVIDADE MÚTUA

<b>Fokkinga</b>	$\begin{cases} f \cdot in = h \cdot F \langle f, g \rangle \\ g \cdot in = k \cdot F \langle f, g \rangle \end{cases} \equiv \langle f, g \rangle = \langle \langle h, k \rangle \rangle$	(42)
<b>“Banana-split”</b>	$\langle \langle i \rangle, \langle j \rangle \rangle = \langle \langle i \times j \rangle \cdot \langle F \pi_1, F \pi_2 \rangle \rangle$	(43)

## COINDUÇÃO

<b>Universal-ana</b>	$k = \llbracket \beta \rrbracket \Leftrightarrow out \cdot k = (F k) \cdot \beta$	(44)
<b>Cancelamento-ana</b>	$out \cdot \llbracket \alpha \rrbracket = F \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \alpha$	(45)
<b>Reflexão-ana</b>	$\llbracket out \rrbracket = id_{\top}$	(46)
<b>Fusão-ana</b>	$\llbracket \alpha \rrbracket \cdot f = \llbracket \beta \rrbracket \Leftarrow \alpha \cdot f = (F f) \cdot \beta$	(47)
<b>Absorção-ana</b>	$\top f \cdot \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket B(f, id) \cdot \alpha \rrbracket$	(48)
<b>Def-map</b>	$\top f = \llbracket B(f, id) \cdot out_{\mathbb{F}} \rrbracket$	(49)

## FUNCTORES

<b>Functor-F</b>	$F(g \cdot h) = (F g) \cdot (F h)$	(50)
<b>Functor-id-F</b>	$F id_A = id_{(F A)}$	(51)

## CONDICIONAL

<b>Natural-guarda</b>	$p? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)?$	(52)
<b>Def condicional de McCarthy</b>	$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$	(53)
<b>1.<sup>a</sup> Lei de fusão do condicional</b>	$f \cdot (p \rightarrow g, h) = p \rightarrow f \cdot g, f \cdot h$	(54)
<b>2.<sup>a</sup> Lei de fusão do condicional</b>	$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$	(55)

<b>Multiplicação</b>	$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \top \mu$	(56)
<b>Unidade</b>	$\mu \cdot u = \mu \cdot \top u = id$	(57)
<b>Natural-<math>u</math></b>	$u \cdot f = \top f \cdot u$	(58)
<b>Natural-<math>\mu</math></b>	$\mu \cdot \top (\top f) = \top f \cdot \mu$	(59)
<b>Composição monádica</b>	$f \bullet g \stackrel{\text{def}}{=} \mu \cdot \top f \cdot g$	(60)
<b>Associatividade-<math>\bullet</math></b>	$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h$	(61)
<b>Identidade-<math>\bullet</math></b>	$u \bullet f = f = f \bullet u$	(62)
<b>Associatividade-<math>\bullet/\cdot</math></b>	$(f \bullet g) \cdot h = f \bullet (g \cdot h)$	(63)
<b>Associatividade-<math>\cdot/\bullet</math></b>	$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\top g \cdot h)$	(64)
<b><math>\mu</math> versus <math>\bullet</math></b>	$id \bullet id = \mu$	(65)
<b>‘<math>\mu</math> as binding’</b>	$\mu x \stackrel{\text{def}}{=} x \gg= id$	(66)
<b>‘Binding as <math>\mu</math>’</b>	$x \gg= f \stackrel{\text{def}}{=} (\mu \cdot \top f)x$	(67)
<b>Sequenciação</b>	$x \gg y \stackrel{\text{def}}{=} x \gg= \underline{y}$	(68)
<b>Notação-do</b>	$do \{x \leftarrow a; b\} \stackrel{\text{def}}{=} a \gg= (\lambda x \rightarrow b)$	(69)

DEFINIÇÕES *ao ponto*

<b>Notação-lambda</b>	$f a = b \equiv f = \lambda a \rightarrow b$	(70)
<b>Def-comp</b>	$(f \cdot g)x \stackrel{\text{def}}{=} f(gx)$	(71)
<b>Def-id</b>	$id x \stackrel{\text{def}}{=} x$	(72)
<b>Def-const</b>	$\underline{x} y \stackrel{\text{def}}{=} x$	(73)
<b>Def-split</b>	$\langle f, g \rangle x \stackrel{\text{def}}{=} (f x, g x)$	(74)
<b>Def-<math>\times</math></b>	$(f \times g)(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (f a, g b)$	(75)
<b>Def-cond</b>	$(p \rightarrow f, g)x \stackrel{\text{def}}{=} \text{if } px \text{ then } f x \text{ else } g x$	(76)
<b>Def-proj</b>	$\pi_1(x, y) = x \quad \wedge \quad \pi_2(x, y) = y$	(77)
<b>Elim-let</b>	$\text{let } x = a \text{ in } b \stackrel{\text{def}}{=} b[x/a]$	(78)
<b>Elim-pair</b>	$t \stackrel{\text{def}}{=} t[(x, y)/z, x/\pi_1 z, y/\pi_2 z]$	(79)