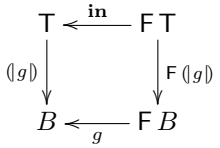
Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2011/12 - Ficha nr.° 10

1. Recorde o diagrama genérico de um catamorfismo de gene g sobre o tipo T e a sua propriedade universal:



$$k = (\!|g|\!) \;\equiv\; k \cdot \mathbf{in} = g \cdot \mathsf{F}\ k$$

Nesta disciplina vimos vários exemplos de T, por exemplo os números naturais $\mathbb{N}_0$, listas $[A]$ e dois tipos de árvores binárias,

$$\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = \mathsf{Leaf}\ a \mid \mathsf{Fork}\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$$

e

$$\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = \mathsf{Empty} \mid \mathsf{Node}\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$$

A estes tipos podemos acrescentar outros como, por exemplo, o das listas não vazias

$$\mathbf{data}\ \mathsf{NEList}\ a = \mathsf{Sing}\ a \mid \mathsf{Add}\ (a, \mathsf{NEList}\ a)$$

e o das chamadas "rose trees":

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = \mathsf{Rose}\ a\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

Preencha o quadro seguinte, em que a coluna da esquerda identifica funções sobre o tipo da coluna T, funções essas que conhece ou cujo significado facilmente identifica:

k	g	$\mathsf{F}\ \mathsf{X}$	$\mathsf{F}\ f$	T	$\mathbf{in}$	B
length		$1 + A \times X$		[A]	$[nil\ ,\mathsf{cons}]$	$\mathbb{N}_0$
length			$id + id \times f$	NEList A		$\mathbb{N}_0$
count					[Leaf , Fork]	$\mathbb{N}$
listify	$[singl\ ,\widehat{(+\!+)}]$			LTree A		$[A]$
reverse					$[nil\ ,\mathsf{cons}]$	
sum		$1 + A \times X^2$				
sum					[Sing , Add]	
mirror	$\mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap})$				[Leaf , Fork]	
mirror					[Empty , Node]	
filter p			$id + id \times f$	[A]		[A]
gmax	$[id\ , max]$	$A + A \times X$				A
gmax	$[id\ , max]$				[Leaf , Fork]	A

2. Defina como um catamorfismo a função seguinte, extraída do *Prelude* do Haskell,

$$\begin{aligned}&\mathsf{concat} :: [[a]] \to [a]\\ &\mathsf{concat} = \mathit{foldr}\ (+\!\!+)\ [\,]\end{aligned}$$

e mostre que a propriedade

$$\mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = \mathsf{sum} \cdot \mathsf{map}\ \mathsf{length} \tag{1}$$

se verifica, recorrendo às leis de *fusão*- e *absorção*-cata

$$f \cdot (\!|h|\!) = (\!|k|\!) \quad \Leftarrow \quad f \cdot h = k \cdot (\mathsf{F}\ f) \tag{2}$$

$$(\!|h|\!) \cdot \mathsf{T}\ f \quad = \quad (\!|h \cdot \mathsf{B}\ (f, id)|\!) \tag{3}$$

em que, para listas, se tem $\mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times g$, $\mathsf{F}\ f = \mathsf{B}\ (id, f)$ e $\mathsf{T}\ f = \mathsf{map}\ f$.

3. A função correspondente a concat para árvores é

$$\begin{aligned}&\mathsf{join} :: \mathsf{LTree}\ (\mathsf{LTree}\ a) \to \mathsf{LTree}\ a\\ &\mathsf{join} = (\!|[id\ , \mathsf{Fork}]|\!)\end{aligned}$$

que junta uma *árvore de árvores* de tipo LTree numa só árvore. Conjecture a propriedade (1) para join e demonstre-a.

4. No quadro que se segue mostra-se a classificação de algumas funções conhecidas de acordo com o respectivo F:

T	F X	**Serialização**	**Ordenação**	**Inversão**	**Factorial**	**Quadrado**	**Outros**
$\mathbb{N}_0$	$1 + X$						$(a*), (`div`b)$
Listas	$1 + A \times X$		$iSort$	$invl$	fac	sq	$look$
BTree	$1 + A \times X^2$	*in/pré/pós*	$qSort$				$hanoi, traces$
LTree	$A + X^2$	$tips$	$mSort$	$invLTree$	$dfac$	dsq	fib

Identifique a linha e coluna onde deve, do quadro acima, colocar o hilomorfismo de *bubble sorting*, identificando para ele os genes $divide$ e $conquer$:

$$\begin{aligned}&bSort :: \mathsf{Ord}\ a \Rightarrow [a] \to [a]\\ &bSort\ [\,] = [\,]\\ &bSort\ l\ = \mathbf{let}\ (x, m) = \mathsf{bubble}\ l\\ &\qquad\quad \mathbf{in}\ \ x : bSort\ m\\ &\mathsf{bubble} :: \mathsf{Ord}\ a \Rightarrow [a] \to (a, [a])\\ &\mathsf{bubble}\ [x]\ \ \ = (x, [\,])\\ &\mathsf{bubble}\ (x : l) = \mathbf{let}\ (y, m) = \mathsf{bubble}\ l\\ &\qquad\quad \mathbf{in}\ \ \mathbf{if}\ x < y\ \mathbf{then}\ (x, y : m)\ \mathbf{else}\ (y, x : m)\end{aligned}$$

5. A função que calcula a média dos elementos que se guardam numa árvore de tipo LTree pode escrever-se sob a forma

$$avg\ t = \frac{\mathsf{sum}\ t}{count\ t}$$

em que sum e $count$ são catamorfismos já identificdos. Essa função, que necessita de duas visitas à árvore t para fazer esse cálculo, pode ser convertida numa que só faz uma tal visita,

$$avg\ t = s\ /\ c\ \mathbf{where}\ (s, c) = (\!|g|\!)\ t$$

recorrendo à lei de *banana-split*. Calcule o gene g e converta $(\!|g|\!)$ para Haskell com variáveis.