Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2011/12 - Ficha nr.° 9

1. Considere o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
[\mathbb{N}_0] \arrow[rr, bend left, "outList"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[ll, bend left, "inList"] \\
\mathbb{N}_0 \arrow[u, "a"] \arrow[r, bend left, "outNat"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, bend left, "inNat"] \arrow[r, "id+\langle x,id\rangle"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id+id\times a"']
\end{tikzcd}
$$

   que capta a seguinte propriedade da função a,

$$a \quad = \quad \mathit{inList} \cdot (id + id \times a) \cdot (id + \langle x, id \rangle) \cdot \mathit{outNat}$$

   para $\mathit{inNat} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ e $\mathit{inList} = [\mathit{nil}\ , \mathsf{cons}]$, onde $\mathit{nil} = \underline{[\,]}$ e $\mathsf{cons}\ (h, t) = h : t$.

   Funções com esta estrutura dizem-se *anamorfismos* do seu tipo de saída (listas de naturais neste caso).

   (a) Explique por que é que a propriedade dada se pode escrever, alternativamente, sob a forma

$$a \cdot \mathit{inNat} \quad = \quad \mathit{inList} \cdot (id + \langle x, a \rangle) \tag{1}$$

   (b) Diga o que faz a função a para $x = \mathsf{succ}$.

2. Seja dada a função

$$
\begin{array}{l}
\mathit{odd} = (id + \langle \mathit{impar}, id \rangle) \cdot \mathit{outNat} \\
\quad \textbf{where}\ \mathit{impar}\ n = 2 * n + 1
\end{array}
$$

   Faça o diagrama do anamorfismo de listas $\mathit{odds} = [\!(\mathit{odd})\!]$ e derive a correspondente versão em Haskell com váriáveis.

3. Identifique o tipo do anamorfismo

$$
\begin{array}{l}
\mathit{suffixes} = [\!(g)\!] \\
\quad \textbf{where}\ g\ [\,] = i_1\ [\,] \\
\qquad g\ (h : t) = i_2\ (h : t, t)
\end{array}
$$

   representando-o sob a forma de um diagrama.

4. Relembre o cálculo que fez numa ficha anterior da lei de fusão-cata e adapte-o ao cálculo da lei de fusão-ana:

$$[\!(g)\!] \cdot f = [\!(k)\!] \quad \Leftarrow \quad g \cdot f = (\mathsf{F}\ f) \cdot k$$

5. Investigue o comportamento do anamorfismo repeat cujo diagrama é:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{N}_0]} & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[l, "inList"'] \\
\mathbb{N}_0 \arrow[u, "\mathsf{repeat}"] \arrow[r, "i_2 \cdot \langle id, id \rangle"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id + id \times \mathsf{repeat}"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, derive a definição *pointwise* de repeat a partir da sua definição

$$\mathsf{repeat} = [\!(\, i_2 \cdot \langle id, id \rangle \,)\!]$$

6. O desenho que se segue

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Problema}} \arrow[r, "divide\ \text{(análise)}"] \arrow[d, "solve\ \text{(problema)}"'] & \boxed{\text{Sub-problemas}} \arrow[d, "solve\ \text{(sub-problemas)}"] \\
\boxed{\text{Solução}} & \boxed{\text{Sub-soluções}} \arrow[l, "conquer\ \text{(síntese)}"]
\end{tikzcd}$$

descreve aquela que é talvez a principal competência de um bom programador: a capacidade de dividir um problema complexo em partes e a de saber juntar as respectivas sub-soluções para assim resolver o problema inicial.

No Cálculo de Programas, o esquema desenhado acima é captado pelo diagrama de um *hilomorfismo*, cujo ingrediente principal é a fixação do padrão de organização das sub-soluções, captado pelo *functor* polinomial F:

$$\begin{array}{rcl} solve & = & \llbracket conquer, divide \rrbracket \\ & = & (\!|\, conquer \,|\!) \cdot [\!(\, divide \,)\!] \end{array}$$

a que corresponde o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "divide"] \arrow[d, "solve"'] & \mathsf{F}A \arrow[d, "\mathsf{F}solve"] \\
B & \mathsf{F}B \arrow[l, "conquer"]
\end{tikzcd}$$

isto é, tem-se a equação

$$solve = conquer \cdot (\mathsf{F}\ solve) \cdot divide \tag{2}$$

(a) Mostre que

- para $divide = \mathsf{out}$ se tem $solve = (\!|\, conquer \,|\!)$
- para $conquer = \mathbf{in}$ se tem $solve = [\!(\, divide \,)\!]$.

(b) Derive a seguinte definição da função factorial,

$$\begin{array}{l} fac\ 0 = 1 \\ fac\ n = n * fac\ (n - 1) \end{array}$$

a partir da sua construção como o hilomorfismo de listas ($\mathsf{F}\ f = id + id \times f$) cujo anamorfismo enumera os primeiros n números naturais e cujo catamorfisimo multiplica esses números. Após a identificação de $divide$ e de $conquer$, faça um diagrama da composição $fac = (\!|\, conquer \,|\!) \cdot [\!(\, divide \,)\!]$. Finalmente, derive a definição dada por aplicação da equação (2).