Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2011/12 - Ficha nr.° 7

1. Considere o diagrama que representa a propriedade universal dos catamorfismos, instanciada para listas em Haskell ($\mathsf{F}\, f = id + id \times f$):

$$\begin{tikzcd} {[a]} \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + a \times [a] \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "id+id\times(\!|g|\!)"] \\ b & 1 + a \times b \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad f = (\!|g|\!) \;\equiv\; f \cdot \mathbf{in} = g \cdot (id + id \times f) \tag{1}$$

Tem-se, neste caso, $\mathbf{in} = [nil\ , \mathsf{cons}]$, $nil\ \_ = [\,]$ e $\mathsf{cons}\ (a, x) = a : x$.

(a) Calcule a função out tal que $\mathsf{out} \cdot \mathbf{in} = id$.

(b) Mostre que a função

$\mathsf{map} :: (a \to b) \to [a] \to [b]$
$\mathsf{map}\ f\ [\,] = [\,]$
$\mathsf{map}\ f\ (h : t) = (f\ h) : \mathsf{map}\ f\ t$

se reduz à equação

$$(\mathsf{map}\ f) \cdot \mathbf{in} \quad = \quad \mathbf{in} \cdot (id + f \times id) \cdot (id + id \times (\mathsf{map}\ f))$$

e que, portanto, $\mathsf{map}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + f \times id)|\!)$.

(c) Identifique como catamorfismos de listas as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso:

- $f = \mathsf{reverse}$
- $f = foldr\ (*)\ 1$
- f é a função que implementa o algoritmo de ordenação de listas por inserção ('insertion sort').

2. O diagrama que se segue representa a lei de fusão de catamorfismos

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T} \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & \mathsf{F}\,\mathsf{T} \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\,(\!|g|\!)"] \\ A \arrow[d, "f"'] & \mathsf{F}\,A \arrow[l, "g"] \arrow[d, "\mathsf{F}\,f"] \\ B & \mathsf{F}\,B \arrow[l, "h"] \end{tikzcd} \qquad f \cdot (\!|g|\!) = (\!|h|\!) \;\Leftarrow\; f \cdot g = h \cdot \mathsf{F}\,f \tag{2}$$

em que T é um tipo indutivo (eg. listas, $\mathbb{N}_0$) e $\mathbf{in}$ é a sua álgebra de construção (com inversa out, não representada no diagrama). Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$
\begin{array}{ll}
& f \cdot (\!| g |\!) = (\!| h |\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (f \cdot (\!| g |\!)) \cdot \mathbf{in} = h \cdot (\mathsf{F}(f \cdot (\!| g |\!))) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot ((\!| g |\!) \cdot \mathbf{in}) = (h \cdot \mathsf{F} f) \cdot \mathsf{F}(\!| g |\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (f \cdot g) \cdot \mathsf{F}(\!| g |\!) = (h \cdot \mathsf{F} f) \cdot \mathsf{F}(\!| g |\!) \\
\Leftarrow & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \cdot g = h \cdot \mathsf{F} f
\end{array}
$$

Observação: repare que não usou qualquer definição de F no cálculo; assim, a lei é geral e válida para além dos tipos e functores F que conhece.

3. Introduza variáveis na igualdade de funções

$$(a*) \cdot (b*) \quad = \quad ((a*b)*) \tag{3}$$

mostrando assim que essa igualdade exprime a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{N}_0$. Sabendo que $(a*) = (\!| [\underline{0}\ , (a+)] |\!)$, demonstre a validade de (3) usando a lei de fusão-cata (2) acima deduzida. Assuma as propriedades de $+$ e $*$ (sobre $\mathbb{N}_0$) que conhece.

4. Resolva a equação $(\!| x |\!) = id$ em ordem a x e demonstre assim a lei de *relexão-cata*, válida para qualquer tipo de dados (naturais, listas, árvores, etc). Faça um diagrama que ilustre esta situação bem particular do cálculo de catamorfismos.

5. Considere o seguinte par de funções mutuamente recursivas que testam a paridade de um número:

$$\left\{ \begin{array}{l} impar\ 0 = \mathsf{False} \\ impar\ (n+1) = par\ n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} par\ 0 = \mathsf{True} \\ par\ (n+1) = impar\ n \end{array} \right.$$

   (a) Mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

   $$\left\{ \begin{array}{l} impar \cdot \mathbf{in} = [\underline{\mathsf{False}}\ , \pi_2] \cdot (id + \langle impar, par \rangle) \\ par \cdot \mathbf{in} = [\underline{\mathsf{True}}\ , \pi_1] \cdot (id + \langle impar, par \rangle) \end{array} \right.$$

   onde $\mathbf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.

   (b) Mostre, recorrendo às leis da recursividade múltipla e da troca, que par e $impar$ se podem combinar num único ciclo-for com duas variáveis,

   $$\begin{array}{l} impar = \pi_1 \cdot imparpar \\ par = \pi_2 \cdot imparpar \\ imparpar = \mathsf{for\ swap\ (False, True)} \end{array}$$

   sabendo que, como se viu nas aulas teóricas, catamorfismos de naturais são ciclos-for.

6. Considere o par de funções

$$\begin{array}{l} f1\ [\,] = [\,] \\ f1\ (h:t) = h : (f2\ t) \\ f2\ [\,] = [\,] \\ f2\ (h:t) = f1\ t \end{array}$$

Use a lei de recursividade múltipla para definir $\langle f1, f2 \rangle$ como um catamorfismo de listas e desenhe o respectivo diagrama.