Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2011/12 - Ficha nr.° 2

1. Seja dada a função $\mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$. Faça um diagrama que explique o tipo de swap e mostre, usando o cálculo de programas, que $\mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} = \mathsf{id}$.

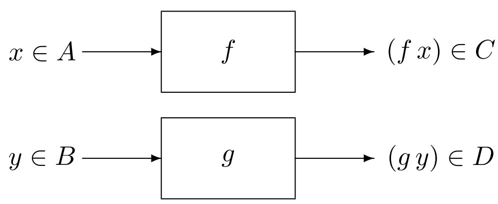
2. Apresente justificações para cada um dos passos dados no cálculo que se vai seguir da propriedade

$$\langle i, j \rangle \cdot h \quad = \quad \langle i \cdot h, j \cdot h \rangle$$

que se conhece pelo nome de **fusão**-$\times$. Repare como o cálculo procede resolvendo a equação $\langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle$ em ordem a x e a y:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle i, j \rangle \cdot h = \langle x, y \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = x \\ \pi_2 \cdot (\langle i, j \rangle \cdot h) = y \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (\pi_1 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = x \\ (\pi_2 \cdot \langle i, j \rangle) \cdot h = y \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} i \cdot h = x \\ j \cdot h = y \end{array} \right.
\end{array}
$$

3. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{1}$$

que capta a aplicação *paralela* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$ independentes entre si.

   (a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

(b) Sem recorrer à alínea anterior, demonstre as igualdades

$$\mathsf{id} \times \mathsf{id} = \mathsf{id} \tag{2}$$
$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1 \tag{3}$$
$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2 \tag{4}$$

(c) Demonstre a lei de **absorção**-$\times$:

$$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle \tag{5}$$

Sugestão: resolva em ordem a x e y a equação $(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle x, y \rangle$.

4. Considere as funções seguintes:

$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times \mathsf{id} \rangle$
$g = \langle \mathsf{id} \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$

(a) Identifique, justificadamente, os seus tipos

(b) Mostre que $f \cdot g = \mathsf{id}$.

5. Considere uma função d da qual apenas conhece duas propriedades: $\pi_1 \cdot d = \mathsf{id}$ e $\pi_2 \cdot d = \mathsf{id}$. Mostre que essa função é, necessariamente, a mesma que em Progrmação Funcional escreveria da forma seguinte, em Haskell:

$d :: a \to (a, a)$
$d\ a = (a, a)$

(Esta função, que duplica um valor, designa-se habitualmente por função *diagonal*.)

6. Considere o seguinte tipo, em Haskell,

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Vec}\ a\ b = \mathsf{Vec}\{x :: a, y :: b\}$$

que lhe permite representar vectores a duas dimensões a e b.

(a) A semântica da linguagem garante-nos, por construção, as igualdades $x\ (\mathsf{Vec}\ a\ b) = a$ e $y\ (\mathsf{Vec}\ a\ b) = b$. Mostre então que o facto

$$\langle x, y \rangle \cdot (\mathsf{uncurry\ Vec}) = \mathsf{id} \tag{6}$$

se verifica, em que (como se viu na ficha anterior) $\mathsf{uncurry}\ f\ (a, b) = f\ a\ b$. **Sugestão**: comece por mostar as igualdades $x \cdot (\mathsf{uncurry\ Vec}) = \pi_1$ e $y \cdot (\mathsf{uncurry\ Vec}) = \pi_2$.

(b) Considere a função que multiplica um escalar por um vector definida da forma seguinte:

$mul\ s = uv \cdot ((s*) \times (s*)) \cdot \langle x, y \rangle$
  $\mathbf{where}\ uv = \mathsf{uncurry\ Vec}$

Mostre que a correspondente definição *ao ponto* (i.é, com variáveis) é

$mul\ s\ v = \mathsf{Vec}\ (s * a)\ (s * b)$
  $\mathbf{where}\ v = \mathsf{Vec}\ a\ b$