Cálculo de Programas

2.° ano das Licenciaturas em
Engenharia Informática e Ciências da Computação
UNIVERSIDADE DO MINHO

2011/12 - Ficha nr.° 6

1. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\begin{cases} \mathsf{F}\ X = \mathsf{Int} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{cases}$$

   Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

   $\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{F}\ X \times \mathsf{G}\ X$

2. Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ e $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ que a seguir se definem:

   $(\mathsf{F} + \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) + (\mathsf{G}\ X)$
   $(\mathsf{F} \times \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) \times (\mathsf{G}\ X)$

3. Para cada tipo de dados A defina-se o functor constante

$$\begin{cases} \mathsf{A}\ X = A \\ \mathsf{A}\ f = id \end{cases}$$

   (a) Mostre que $\mathsf{B}\ (X, Y) = \mathsf{A} + X \times Y$ é um bifunctor e declare-o em Haskell como instância da classe `Bifunctor` definida no módulo `Cp.hs`.

   (b) Infira (através de um diagrama) a propriedade natural de uma função polimórfica f com tipo $f :: \mathsf{B}\ (X, Y) \to \mathsf{A} + X$.

4. Considere a igualdade *pointwise* $(\mathsf{curry}\ g)\ (f\ a)\ b = g\ (f\ a, b)$.

   (a) Mostre que essa igualdade é equivalente à lei de fusão da exponenciação,

$$\overline{g} \cdot f \quad = \quad \overline{g \cdot (f \times id)} \qquad (1)$$

   onde $\overline{g}$ abrevia $\mathsf{curry}\ g$.

   (b) Apresente justificações para o cálculo que se segue dessa lei:

$$\begin{array}{ll}
& \overline{g} \cdot f = \overline{x} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \cdot f) \times id) = x \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap} \cdot ((\overline{g} \times id) \cdot (f \times id)) = x \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times id)) \cdot (f \times id) = x \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g \cdot (f \times id) = x
\end{array}$$

5. Deduza a lei de reflexão da exponenciação, $\overline{\mathsf{ap}} = id$ (a) através de um diagrama ; (b) por cálculo analítico.

6. Considere a seguinte definição:

$$\begin{array}{l} \mathsf{exp} :: (a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \\ \mathsf{exp}\ f = \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \end{array}$$

   (a) Desenhe o respectivo diagrama.
   (b) Demonstre que $\mathsf{exp}\ f \cdot \mathsf{exp}\ g = \mathsf{exp}\ (f \cdot g)$. Use este resultado para mostrar que, para um dado C,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = X^C \\ \mathsf{F}\ f = \mathsf{exp}\ f \end{array} \right.$$

   é um functor.
   (c) Mostre que exp pode também ser definida da seguinte forma:

$$\mathsf{exp}\ f\ \ g = f \cdot g$$

7. O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const}\ :: a \rightarrow b \rightarrow a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

   está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k.

   (a) Sabidas que são duas proprieades deste combinador,

$$\underline{k} \cdot g = \underline{k} \tag{2}$$

$$f \cdot (\underline{k}) = \underline{(f\ k)} \tag{3}$$

   demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{4}$$

   a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes acima indicadas.
   (b) A função const, cujo tipo também se pode escrever da forma $a \rightarrow a^b$, satisfaz a propriedade (natural) que é expressa pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{const}"] \arrow[d, "f"'] & A^B \arrow[d, "\mathsf{exp}\ f"] \\ C \arrow[r, "\mathsf{const}"'] & C^B \end{tikzcd}$$

   Registe-a, converta-a para notação *pointwise* e exprima por palavras suas o seu significado.